研究生教学用书

专 业 课 系 列

基础拓扑学

Basic Topology

胡适耕 编著

BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

华中科技大学出版社

研究生教学用书

专 业 课 系 列

ISBN 978-7-5609-4114-1



9 787560 941141 >

定价：22.80元

研究生教学用书
专 业 课 系 列

基础拓扑学

胡适耕 编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

基础拓扑学/胡适耕　编著.—武汉:华中科技大学出版社,2007年8月
ISBN 978-7-5609-4114-1

Ⅰ.基…　Ⅱ.胡…　Ⅲ.拓扑　Ⅳ.O189

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第115704号

基础拓扑学　　胡适耕　编著

责任编辑:谢燕群　　封面设计:刘　卉
责任校对:朱　霞　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:787mm×960mm　1/16　印张:15.25　字数:260 000
版次:2007年8月第1版　印次:2007年8月第1次印刷　定价:22.80元
ISBN 978-7-5609-4114-1/O·415

写在“研究生教学用书”出版15周年前岁

“接天莲叶无穷碧，映日荷花别样红.”今天，我国的教育正处在一个大发展的崭新时期，而高等教育即将跨入“大众化”的阶段，蓬蓬勃勃，生机无限.在高等教育中，研究生教育的发展尤为迅速.在盛夏已临，面对池塘中亭亭玉立的荷花，风来舞举的莲叶，我深深感到，我国研究生教育就似夏季映日的红莲，别样多姿.

党的十六大报告以空前的力度强调了“科教兴国”的发展战略，强调了教育的重大作用，强调了教育的基础性、全局性、先导性，强调了在社会主义建设中教育的优先发展的战略地位.从报告中，我们可以清楚看到，对高等教育而言，不仅赋予了重大的历史任务，而且更明确提出了要培养一大批拔尖创新人才.不言而喻，培养一大批拔尖创新人才的历史任务主要落在研究生教育肩上.“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基.”国家之间的激烈竞争，在今天，归根结底，最关键的就是高级专门人才，特别是拔尖创新人才的竞争.由此观之，研究生教育的任务可谓重矣！重如泰山！

前事不忘，后事之师.历史经验已一而再、再而三地证明：一个国家的富强，一个民族的繁荣，最根本的是要依靠自己，要以“自力更生”为主.《国际歌》讲得十分深刻，世界上从来就没有什么救世主，只有依靠自己救自己.寄希望于别人，期美好于外力，只能是一种幼稚的幻想.内因是发展的决定性的因素.当然，我们决不应该也决不可能采取“闭关锁国”，自我封闭，固步自封的方式来谋求发展，重犯历史错误.外因始终是发展的必要条件.正因为如此，我们清醒看到了，“自助者人助”，只有“自信、自尊、自主、自强”，只有独立自主，自强不息，走以“自力更生”为主的发展道路，才有可能在向世界开放中，争取到更多的朋友，争取到更多的支持，充分利用好外部的各种有利条件，来扎扎实实地而又尽可能快地发展自己.这一切的关键就在于，我们要有数量与质量足够的高级专门人才，特别是拔尖创新人才.何况，在科技高速发展与高度发达，而知识经济已初见端倪的今天，更加如此.人才，

高级专门人才，拔尖创新人才，是我们一切事业发展的基础.基础不牢，地动山摇；基础坚牢，大厦凌霄；基础不固，木凋树枯；基础深固，硕茂葱绿！

“工欲善其事，必先利其器.”自古凡事皆然，教育也不例外.教学用书是“传道授业解惑”培育人才的基本条件之一.“巧妇难为无米之炊”.特别是在今天，学科的交叉及其发展越来越多及越快，人才的知识基础及其要求越来越广及越高，因此，我一贯赞成与支持出版“研究生教学用书”，供研究生自己主动地选用.早在1990年，本套用书中的第一本即《机械工程测试·信息·信号分析》出版时，我就为此书写了个“代序”，其中提出：一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见.但这不等于他在一切方面均能如此，有所不为才能有所为.如果一个研究生的主要兴趣与工作不在某一特定方面，他也可选择一本有关这一特定方面的书作为了解与学习这方面知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣与工作在这一特定方面，他更应选择一本有关的书作为主要的学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书.这就是我赞成要为研究生编写系列的“研究生教学用书”的原因.今天，我仍然如此来看.

还应提及一点，在教育界有人讲，要教学生“做中学”，这有道理；但须补充一句，“学中做”.既要在实践中学习，又要在学习中实践，学习与实践紧密结合，方为全面；重要的是，结合的关键在于引导学生思考，学生积极主动思考.当然，学生的层次不同，结合的方式与程度就应不同，思考的深度也应不同.对研究生特别是对博士研究生，就必须是而且也应该是“研中学，学中研”，在研究这一实践中，开动脑筋，努力学习，在学习这一过程中，开动脑筋，努力研究；甚至可以讲，研与学通过思考就是一回事情了.正因为如此，“研究生教学用书”就大有英雄用武之地，供学习之用，供研究之用，供思考之用.

在此，还应进一步讲明一点.作为一个研究生，来读“研究生教学用书”中的某书或其他有关的书，有的书要精读，有的书可泛读.记住了书上的知识，明白了书上的知识，当然重要；如果能照着用，当然更重要.因为知识是基础.有知识不一定有力量，没有知识就一定没有力量，千万千万不要轻视知识.对研究生特别是博士研究生而言，最为重要的还不是知识本身这个形而下，而是以知识作为基础，努力通过某

种实践，同时深入独立思考而体悟到的形而上，即《老子》所讲的不可道的"常道"，即思维能力的提高，即精神境界的升华.《周易·系辞》讲了："形而上谓之道，形而下谓之器."我们的研究生要有器，要有具体的知识，要读书，这是基础；但更要有"道"，更要一般，要体悟出的形而上.《庄子·天道》讲得多么好："书不过语.语之所贵者意也，意有所随.意之所随者，不可以言传也."这个"意"，就是孔子所讲的"一以贯之"的"一"，就是"道"，就是形而上.它比语、比书，重要多了.要能体悟出形而上，一定要有足够数量的知识作为必不可缺的基础，一定要在读书去获得知识时，整体地读，重点地读，反复地读；整体地想，重点地想，反复地想.如同韩愈在《进学解》中所讲的那样，能"提其要"，"钩其玄"，以达到南宋张孝祥所讲的"悠然心会，妙处难与君说"的体悟，化知识为己之素质，为"活水源头".这样，就可驾驭知识，发展知识，创新知识，而不是为知识所驾驭，为知识所奴役，成为计算机的存储装置.

这套"研究生教学用书"从第一本于1990年问世以来，到明年，就经历了不平凡的15个春秋.从研究生教育开始以来，我校历届领导都十分关心研究生教育，高度重视研究生教学用书建设，亲自抓研究生教学用书建设；饮水思源，实难忘怀！"逝者如斯夫，不舍昼夜."截至今天，"研究生教学用书"的出版已成了规模，蓬勃发展.目前已出版了用书69种，有的书发行了数万册，有22种分别获得了国家级、省部级教材奖、图书奖，有数种已为教育部列入向全国推荐的研究生教材，有20种一印再印，久销不衰.采用此书的一些兄弟院校教师纷纷来信，称赞此书为研究生培养与学科建设做出了贡献.我们深深感激这些鼓励，"衷心藏之，何日忘之?!"没有读者与专家的关爱，就没有我们"研究生教学用书"的发展.

唐代大文豪李白讲得十分正确："人非尧舜，谁能尽善?"我始终认为，金无足赤，物无足纯，人无完人，文无完文，书无完书."完"全了，就没有发展了，也就"完"蛋了.江泽民同志在党的十六大报告中讲得多么深刻："实践没有止境，创新也没有止境."他又指出，坚持"三个代表"重要思想的关键是与时俱进.这套"研究生教学用书"更不会例外.这套书如何?某本书如何?这样的或那样的错误、不妥、疏忽或不足，必然会有.但是，我们又必须积极、及时、认真而不断地加以改进，与时俱进，奋发前进.我们衷心希望与真挚感谢读者与专家不吝指教，及时批

评．当局者迷，兼听则明；“嘤其鸣矣，求其友声．”这就是我们肺腑之言．当然，在这里，还应该深深感谢“研究生教学用书”的作者、审阅者、组织者（华中科技大学研究生院的有关领导和工作人员）与出版者（华中科技大学出版社的编辑、校对及其全体同志）；深深感谢对“研究生教学用书”的一切关心者与支持者，没有他们，就决不会有今天的“研究生教学用书”．

我们真挚祝愿，在我们举国上下，万众一心，在“三个代表”重要思想的指引下，努力全面建设小康社会，加速推进社会主义现代化，为实现中华民族伟大复兴，“芙蓉国里尽朝晖”这一壮丽事业中，让我们共同努力，为培养数以千万计高级专门人才、特别是一大批拔尖创新人才，完成历史赋予研究生教育的重大任务而做出应有的贡献．

谨为之序．

中国科学院院士
华中科技大学学术委员会主任
杨叔子
2003年7月于喻园

前言

本书作者的两本书:《实变函数》与《泛函分析》,分别于1999年与2001年在高等教育出版社出版.使用这两本书作为教材的同行所传递的颇为乐观的信息,使作者明确意识到,像实变函数与泛函分析这样主要提供理论训练的课程,仍然受到大学生(至少是部分大学生)的欢迎.在高兴之余,不免思量:是将已酝酿多年的一部拓扑学教材贡献给读者的时候了,这样就将终于完成预定中的"三部曲".我始终相信,正是"实变函数"、"泛函分析"与"拓扑学"这三门互有联系的课程,以最典范的方式为大学生提供数学思维与数学方法的训练.想成为数学家的大学生,很难抗拒这些优美课程的诱惑.

早在20世纪80年代初,在拓扑学界老前辈方嘉琳教授的建议与指点下学习拓扑学之时,本人就与拓扑学结下了某种缘份.可惜这种缘份不深,终究没有在该领域扎下根来,至今引以为憾.我的研究兴趣与思维模式更偏向于分析方面,始终没有形成拓扑学所需要的那种几何风格.诚如大多数拓扑学著作所强调的,拓扑学毕竟是一个几何分支!我意识到,很难抑制自己从分析背景出发去讲述拓扑学;而对于想成为拓扑学家的读者而言,这未免过于偏狭与片面.但对于仅打算从拓扑学中吸取若干有价值的思想并熟悉某些常用结果的读者(他们显然占绝大多数),循分析的途径走向拓扑学也许是更可取的.在现今大学数学课程体系中,分析方面的课程毕竟占有最大的份量.由此说来,对于本书所用方法的选择,似乎能聊以自宽.

今日之拓扑学已如此庞大,一个初级课程无疑只能涉及其中一些很基本的内容.即使对基本内容及其表述形式的选择,亦极具多样性,根本无法与其他作者完全求同.这就有必要对本书可能不同于它书之处稍作说明.首先,如前所述,本书是为那些只希望对拓扑学的主要思想与基本结果有所了解的人写的,因此它不涉及任何只有拓扑学家才感兴趣的专门课题.其次,本人一向认为,无论学习拓扑学或任何其他数学学科,真正重要的事情是领悟支配该学科的思想脉络.要把握一门学科的思想脉络,研读大量具体材料固然是一条可靠的途径,但即使通过对较少但很典型的材料的恰当分析,同样可以达到目的.鉴于此,本书并不追求材料的完备与论证的详尽,但处处强调隐藏在抽象概念与命题后面的那些具有实质意义的思想,这些思想多半植根于很初等的事实中,因而往往极其自然而且简单.本书也特别强调那些在处理抽象结构时普遍运用的概念框架与理论模式,它们对于所有理论数学学科都有借鉴意义,因而应成为数学理论思维训练

中最重要的一项内容.

将对于思想性的强调置于细节处理及技巧训练之上，是作者在拙著《实变函数》与《泛函分析》中所追求的，至今并无悔意，因而自然为本书所沿袭. 如果作为一种风格能为读者所接受，我将备感欣慰. 当然，任何作法有其利时必有其弊. 本书在不惜笔墨阐述概念背景及支配结论的思想时，不免会挤去一些逻辑证明的篇幅，致使对一些证明所用的技巧未作充分的解释. 对此可以说，某些过于生僻的技巧本来就不必太予重视；而对于一些常用方法，则只有通过适当练习来掌握. 本书有意配备了较多的习题(共300道)，建议读者务必完成其中一部分. 书末有关于习题的详细提示，这主要是为采用本书作为教材的教师提供参考. 读者在解题时倘能尽量不用书末的提示，必能收到更好的效果. 如果你的解法与书末提示并不一致而又无可挑剔，你应当感到高兴. 实际上，大部分习题是容易的，学得较好的学生无需任何提示.

从作者的经验看来，本书对于高年级大学生与硕士生都是有益的. 至于对阅读内容的选择，则应依各人的具体需要而定. 若将本书用作教材，则对内容有几种组合方式可供考虑. 第1章通常可由学生自己阅读. 若选择第2章与第3章(适当删去少数内容)及4.1节，则需50学时左右；若加上第4章余下的内容，则需60学时；讲完全部内容，约需72学时. 对于个别内容的增删及次序的调整，使用本书的教师是最权威的.

作　者

2005年7月于武汉

记号与约定

A^c：集 A 的补.

A°：集 A 的内部.

$\overline{A}$：集 A 的闭包.

A'：集 A 的导集.

$|A|$：集 A 的基数.

$\mathscr{A}' = \{A^c : A \in \mathscr{A}\}$.

$\mathscr{A}^{\#} = \bigcup \{A : A \in \mathscr{A}\}$.

$\mathscr{A}^*$：集族 $\mathscr{A}$ 中集的有限交之全体.

$B_r(x)$：以 x 为心以 r 为半径的开球.

$\overline{B}_r(x)$：以 x 为心以 r 为半径的闭球.

$\mathbf{C}$：复数集.

$C(X,Y)$：从 X 到 Y 的连续映射之全体；$C(X) = C(X,\mathbf{R})$.

$C_0(X)$：X 上有紧支集的连续实函数之全体.

$\mathrm{c} = |\mathbf{R}|$：连续统基数.

χ_A：集 A 的特征函数.

$D(F)$：映射 F 的定义域.

$d(A,B)$：集 A 与 B 之间的距离；$d(x,B) = d(\{x\},B)$.

$\operatorname{diam} A$：集 A 的直径.

Δ 或 Δ_X：集 $X \times X$ 的对角线.

∂A：集 A 的边界；∂：边界算子.

$\operatorname{Gr}F$：映射 F 的图像.

$H_p(X)$：X 的 p 阶同调群.

$H^p(X)$：X 的 p 阶上同调群.

I 或 1_X：X 上的单位映射.

$\operatorname{Im}F$：映射 F 的像.

$i : A \subset X$：A 到 X 的包含映射.

J：通常记$[0,1]$或任一区间.

LCH＝局部紧 Hausdorff 空间.

$\mathbf{N}$：自然数集.

$\mathscr{N}_x$：点 x 的邻域系；$\mathscr{N}_A$：集 A 的邻域系.

P, P_i：通常记投影.

$\pi_1(X)$：空间 X 的基本群.

$\mathbf{Q}$：有理数集；$\mathbf{Q}^n$：$\mathbf{R}^n$ 中的有理点集.

$\mathbf{R}$：实数集；$\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$.

$R(F)$：映射 F 的值域.

S^n：n 维球面.

$\operatorname{supp} f$：函数 f 的支集.

τ：通常记拓扑；τ_X：X 上的某个拓扑.

X, Y, Z：通常记拓扑空间(或度量空间、一致空间).

X_∞：空间 X 的一点紧化.

$\mathbf{Z}$：整数集；$\mathbf{Z}_+$：非负整数集.

$\omega = |\mathbf{N}|$：无限可数基数.

2^X：集 X 的子集之全体.

$\triangleq$：定义为.

$\equiv$：恒等于.

$\cong$：同胚或同构；$\simeq$：同伦等价.

$\subset\subset$：强包含.

$\square$：证完.

几点说明

1. 引证 1.1A 表示第1章第1节中A段；1.1(1)表示第1章第1节中式(1)；定理1.1.1(i)表示定理1.1.1之(i)款；[1;p.1]表示参考文献[1]中第1页. 余类推. 对于原文中的"1.1.1 定义"，引用时写作"定义 1.1.1"；定理、命题等仿此.

2. 指标用法 不致误解时，出现于记号 $\sum$，$\prod$，$\bigcup$，$\bigcap$ 下的指标予以省略. 未加说明时，指标 n 为自然数. 和式 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 依情况可写成：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i,\quad \sum\nolimits_1^n a_i,\quad \sum_i a_i,\quad \sum\nolimits_i a_i \text{ 或} \sum a_i.$$

$\prod X_i$，$\bigcup A_i$ 等仿此. $\bigcup_1^n A_i$ 总可看作 $\bigcup_1^\infty A_i$（只需令 $A_i=\varnothing, i>n$）；$\bigcap A_i$ 仿此. 给定 $x\in\prod X_i$ 与 $F: D\to\prod X_i$，自动认定 $x=(x_i)$，$F=(F_i)$，其中 $x_i\in X_i$，$F_i: D\to X_i$. 特别，写出 $x\in\mathbf{R}^n$，总意味着 $x=(x_i)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

3. 映射 $F: X\to Y$ 表示从 X 到 Y 的映射；$\varphi(\cdot,y)$ 表示映射 $x\to\varphi(x,y)$，其中·代替自变量 x. (F_i) 表示 $F_i(i\in I)$ 的对角线映射，$\prod F_i$ 表示 F_i 的积映射.

4. 极限 $\lim\limits_n x_n$ 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，$\lim\limits_t x_t$ 记网 $\{x_t\}$ 的极限，$\lim\limits_{t,s} x_{ts}$ 记二重网 $\{x_{ts}\}$ 的极限. $\rightrightarrows$ 记一致收敛.

5. 不等式 $A\leqslant B\Leftrightarrow\forall\, a\in A,\forall\, b\in B: a\leqslant b$；$A<B$，$A\leqslant b$ 等仿此. $f(A)\leqslant f(B)\Leftrightarrow\forall\, a\in A,\forall\, b\in B: f(a)\leqslant f(b)$；$f(A)<f(B)$，$f(A)\leqslant\beta$ 等仿此. $f(A)=\beta\Leftrightarrow\forall\, a\in A: f(a)=\beta$.

6. 常数 当记号const出现在式子中时，它表示某个常数，其具体数值难以确定或不必明确写出.

7. 术语 有限稠集指其元素有限的稠集；可数稠集、有限覆盖、可数覆盖、可数拓扑基、无限拓扑基等仿此. 开覆盖指由开集作成的覆盖；闭覆盖、紧覆盖、开邻域、闭邻域、紧邻域、闭邻域基、紧邻域基、连通邻域基等仿此.

8. 其他约定 $a\vee b=\max\{a,b\}$，$a\wedge b=\min\{a,b\}$. 若 $\mathscr{A},\mathscr{B}\subset 2^X$，则 $\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}\Leftrightarrow\forall\, B\in\mathscr{B},\exists\, A\in\mathscr{A}: A\subset B$；$\mathscr{A}\prec\mathscr{B}\Leftrightarrow\forall\, A\in\mathscr{A},\exists\, B\in\mathscr{B}: A\subset B$；$\mathscr{A}=\varnothing\Rightarrow\mathscr{A}^{\#}=\varnothing$，$\bigcap\mathscr{A}=X$.

9. 习题 所有证明题均只陈述要证结论，而省去"求证"之类的词；对习题中出现的记号 X,Y,τ 等一般不作解释，其意义顺题意作自然理解.

目　　录

第1章　绪　　论

顾名思义,绪论是为主体内容作准备的,这就决定了本章的取材.不过,还需作点进一步的说明.从逻辑上看,拓扑学属于现代数学中最基本的部分,它所用到的预备知识似乎不多.但还是需要某些必不可少的基本知识.首先,拓扑结构就其本性而言是某种公理系统,因而不可避免地要直接运用集论的概念、语言与方法.这个序章之设,首先就在于概述有关集论的基本知识.我们将仅限于介绍本书所必需的那部分内容,而不触及较深入的集论问题,如序数理论等.其次,本章要就构建抽象数学结构的一般方法作一简要说明.拓扑空间无疑是一种典型的抽象数学结构,在进入它之前,对于其构建思路预先有一初步印象是有益的.而且,这些知识似乎也应成为你的一般数学素养的一部分.序结构与代数系统并非本书的对象,但为处理拓扑问题所必需,自然应作最低限度的介绍.

本章涉及的概念与术语很多,而实质性的结论则偏少,大概不会很有吸引力.急于进入正题的读者,未必有耐心细读它.况且,本章中大概有不少内容是你所熟知的.如果是这样,你完全可以跳过本章而直接进入其后各章的学习,直至你感到必需查询某个概念或记号时,再回过头来参阅本章的有关部分.

1.1　集与映射

在现代数学中,集与映射概念已通行到这样的程度,有关的知识是学习几乎所有数学课程的必备常识;对于直接建立在集论基础上的拓扑学,则尤其如此.本节的内容是标准的,其表述方式则考虑到本书的特殊需要.

A. 集及其运算

集(或称集合)的直观意义似乎极其浅显,但未必有很多人知道,集是难以严格定义的基本数学概念之一.本书只能满足于一个朴素的描述:具有一定性质的对象之全体构成集,其中的对象就称为该集的**元**(或元素).通常以大写字母 A, B,X,Y 等表示集,以小写字母 a,b,x,y 等表示集的元.若 a 是集 A 的元,则说 a 属于 A,记作 $a\in A$,而以 $a\overline{\in} A$ 表示 a 不属于 A.不含任何元的集称为空集,记

作$\varnothing$. 仅含一个元 a 的集称为单元素集或**单点集**①,记作 $\{a\}$. 注意,$\{a\} \neq a$! 约定以专用字母表示一些最常用的集,如字母 $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 分别记自然数集、整数集、有理数集、实数集与复数集. 表示较简单的集可用枚举法,例如,自然数集就是 $\mathbf{N} = \{1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 更一般的方法是,将一个集 A 表为:

$$A = \{x : x \in X \text{ 且 } x \text{ 满足 } P\}$$

或

$$A = \{x \in X : x \text{ 满足 } P\}, \tag{1}$$

这意味着 A 由 X 中满足 P 的元组成,其中 X 是给定的集,P 是某个命题或条件. 例如,实区间 $A = [a,b]$ 可表为:

$$A = \{x : x \in \mathbf{R} \text{ 且 } a \leqslant x \leqslant b\}$$

或

$$A = \{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x \leqslant b\}.$$

值得注意的是,在表达式(1)中集 A 与命题 P 完全相互确定. 由此可见,集论问题(如 $x \in A$)与逻辑问题(如 x 满足 P)可以互相转化. 无论在理论上与实际处理方法上,这都是意义重大的基本事实.

若集 A 的元都是集 B 的元,则说 A 含于 B 或 B 包含 A,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,且称 A 为 B 的**子集**;用 $A \not\subset B$ 表示 A 不含于 B. 约定空集是任何集的子集. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则说集 A 与 B **相等**,写作 $A = B$. 若 $A \subset B \neq A$,则称 A 为 B 的**真子集**,或说 B 真包含 A. A 的子集之全体记作 2^A,称它为 A 的**幂集**. 注意 $A,\varnothing \in 2^A$,因此 $2^{\varnothing} \neq \varnothing$! 若 A 含 n 个元,则易见 A 恰有 2^n 个子集,这一事实启示出 2^A 这一记号.

同时运用多个集时不免要用到集族概念. 本书在两种意义上使用**集族**一词,其一是指某个幂集 2^X 的子集,这种意义的集族将在1.1D 中详细讨论;其二是指带指标的一组集,如 $\{A_i : i \in I\}$ ②,其中 I 是一非空集,称为**指标集**,对每个 $i \in I$,A_i 是给定的集,不必互异. 当 I 自明或不必明确提到时,就将 $\{A_i : i \in I\}$ 简写作 $\{A_i\}$. 今后指标集无论写出与否,都假定其非空. 以上两种集族在概念上并不相同,但在实际运用时并不严格区别,通常不致引起混乱. 形如 $\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ 的集族称为**集列**,通常简写作 $\{A_n\}$. 若 $A_n \subset A_{n+1}$ (或 $A_n \supset A_{n+1}$),$n = 1,2,\cdots$,则称 $\{A_n\}$ 为**升列**(或**降列**).

在某一问题的讨论中,通常用某个"最大"的集 X 包含所涉及的其他集,此

---

① 一集的元也称为点,将这一名称用于拓扑空间或其他抽象空间中的元,有某种激发直观想象的作用. 但从逻辑上说,"点"并不具有任何更进一步的含义.

② 给定一族元素 $\{x_i : i \in I\}$,$x_i \in X$,实质上意味着给定一映射 $I \to X$,$i \to x_i$,这在概念上当然与给定集 $A = \{x_i\}$ 有别. 不过,在不致混淆时,通常并不强调如上的族 $\{x_i\}$ 与集的区别,且同样使用 $\{x_i\} \subset X$ 这一类集记号.

时称 X 为**全集**. 全集概念是相对的，它随论题改变而变化；但注意到上下文，何为全集通常总是清楚的，因而无需处处点明. 下面假定所涉及的集都含于某个全集 X. 若 $A \subset X$，则称

$$A^c \triangleq \{x \in X : x \overline{\in} A\}$$

为 A 在 X 中的**补集**，当 X 自明时就简称 A^c 为 A 的补集. 补集在集论中的作用，恰如否命题在逻辑中的作用.

用给定的集构成新集的主要方法是集运算. 基本的集运算定义于下.

1.1.1 定义 给定一族集 $\{A_i : i \in I\}$，令

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i (\exists\, i \in I)\},$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i (\forall\, i \in I)\},$$

二者分别称为集 $A_i (i \in I)$ 的**并**与**交**.

并、交及前面定义的补，合称为关于集的 **Boole 运算**.

为书写简便，常将 1.1.1 中定义的并简写作 $\bigcup_i A_i$ 或 $\bigcup A_i$；若 $I = \mathbf{N}$，则 $\bigcup A_i$ 也写作 $\bigcup_1^\infty A_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$；若 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$，则记

$$\bigcup A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

交的记号仿此. 这样，并 $A \cup B$ 与交 $A \cap B$ 的定义已自然包含于定义 1.1.1. 若 $A \cap B = \varnothing$，则说集 A 与 B **互不相交**. 若集族 $\{A_i\}$ 中任意两个集 A_i 与 $A_j (i \neq j)$ 互不相交，则称 $\bigcup A_i$ 为**不交并**.

利用交、并与补，可定义两种新运算（当然实质上并不是新的）：

$$A \backslash B = A \cap B^c; \quad A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A). \tag{2}$$

$A \backslash B$ 称为 A 减去 B 的**差集**；$A \Delta B$ 称为 A 与 B 的**对称差**.

在集论及其应用（如拓扑学）中，常要大量运用集运算. 掌握集运算的规则是重要的. 设 $A, B, A_i \subset X (i \in I)$，关于集运算的主要公式汇集于下：

$$(\bigcup A_i)^c = \bigcap A_i^c, \quad (\bigcap A_i)^c = \bigcup A_i^c; \quad \textbf{（对偶律）} \tag{3}$$

$$\begin{cases} A \cap (\bigcup A_i) = \bigcup (A \cap A_i), \\ A \cup (\bigcap A_i) = \bigcap (A \cup A_i); \end{cases} \quad \textbf{（分配律）} \tag{4}$$

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B; \tag{5}$$

$$A^{cc} = A, \quad A \cup A^c = X, \quad A \cap A^c = \varnothing. \tag{6}$$

对偶律的意义在于：通过取补，可实现并与交的互相转化. 你将看到，这一事实在拓扑学中意义甚大.

集 A 的**特征函数** χ_A 定义为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in A^c. \end{cases} \tag{7}$$

这个函数简单得似乎无足轻重，但实际上价值甚大，其理由在于：集 A 与其特征

函数 χ_A 相互唯一确定. 原则上,关于集的等式或包含式总可转化为关于特征函数的适当关系式. 例如,

$$A=\varnothing \Leftrightarrow \chi_A \equiv 0, \quad A=X \Leftrightarrow \chi_A \equiv 1;$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \chi_A \leqslant \chi_B, \quad A=B \Leftrightarrow \chi_A=\chi_B;$$

$$A=\bigcup A_i \Leftrightarrow \chi_A=\max_i \chi_{A_i};$$

$$\chi_{A^c}=1-\chi_A, \quad \chi_{A\Delta B}=|\chi_A-\chi_B|.$$

以上考虑的集运算有一共同点:参与运算的集及运算的结果,都是同一全集 X 的子集. 下面定义的"积运算"却与此不同.

1.1.2 定义 给定集 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 1)$,一切有序元素组

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad (x_i\in X_i, 1\leqslant i\leqslant n)$$

构成一集 X,称它为 $X_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的**积集**或**直积**,记作

$$X=\prod_{i=1}^{n} X_i \text{ 或 } X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,$$

即

$$\prod_{i=1}^{n} X_i=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i\in X_i(1\leqslant i\leqslant n)\}. \tag{8}$$

若 $X_i=Y(1\leqslant i\leqslant n)$,则将 $\prod X_i$ 写作 Y^n,称它为 Y 的 $\boldsymbol{n}$ **重积**.

关于积集的简单且熟悉的例子是:

$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2: a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$;(矩形)

$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i\in \mathbf{R}(1\leqslant i\leqslant n)\}$; ($n$ 维 Euclid 空间)

$\mathbf{Q}^n=\{(r_1,r_2,\cdots,r_n): r_i\in \mathbf{Q}(1\leqslant i\leqslant n)\}$. ($n$ 维有理点集)

类比于以上例子,一般地,将积集 $X\times Y$ 想象为以 X 与 Y 为边的矩形,而将 $\prod_1^n X_i$ 想象为以 $X_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为边的 n 维方体. 若某个 $X_i=\varnothing$,则自然有 $\prod X_i=\varnothing$.

积集概念亦可与定义 1.1.1 意义下的集运算结合起来考虑,并建立某些运算规则. 例如,容易验证如下分配律:

$$A\times\bigcup_{i=1}^{n} B_i=\bigcup_{i=1}^{n}(A\times B_i).$$

不过,无需去系统展开这类公式,在确有需要时,不难验证并有效运用它们.

至于任意个集的积集,我们推迟至 2.3B 中考虑.

B. 映射

在多门课程中已接触到函数概念,想必已充分体会到,函数概念的本质是自变量 x 的每个值唯一地对应一个函数值 $y=f(x)$,至于 x,y 是数,还是其他对象(如向量、矩阵、直线等),则不是本质的. 这就不难理解,函数概念应被赋予很

一般的形式.

1.1.3 定义 设 X 与 Y 是两个非空集. 若对每个 $x\in X$, 有唯一的 $y\in Y$ 与之对应, 则称此对应为**映射**, 记为某个字母如 F, 并将对应于 x 的 y 写作 Fx 或 $F(x)$, 称 Fx 为映射 F 在 x 的**值**; 称 F 为从 X 到 Y 的映射, 写作 $F: X\to Y$ 或

$$F: X\to Y,\quad x\to Fx.$$

在现代数学中, 映射亦称为变换、算子或函数, 名称的选择与涉及的领域及习惯有关, 并不关乎概念的本质. 函数这一名称更多地用于 $Y=\mathbf{R}$ 的情况(本书中就是如此), 但这并非实质性的限制.

在拓扑学中大量使用的"族", 实质上就是映射: 给定一个族 $\{x_i: i\in I\}\subset X$, 正与给定映射 $I\to X, i\to x_i$ 相当. 反之, 任何映射 $F: X\to Y$ 均可看作一个族 $\{F_x: x\in X\}\subset Y$, 其中 $F_x=Fx$, 此时 X 自然被当成指标集.

下面是有关映射的一连串概念与术语, 它们都可从平常的函数概念中找到其原型, 因而不难获得自然的理解. 给定映射 $F: X\to Y$. 称 X 为 F 的**定义域**, 称集 $\{Fx: x\in X\}$ 为 F 的**值域或像**, 也记作 $R(F)$ 或 $\mathrm{Im}F$; 称 $X\times Y$ 的子集

$$\mathrm{Gr}\, F \triangleq \{(x,Fx): x\in X\} \tag{9}$$

为 F 的图像. 一个如图 1-1 的示意图展示了映射图像的直观形态, 其中"曲线" $\mathrm{Gr}F$ 与"直线" $\{x\}\times Y(x\in X)$ 恰有一个交点 (x, Fx). 若 $Fx=Fy\Rightarrow x=y(x,y\in X)$, 则称 F 为**单射**; 若 F 以 Y 为值域, 则称 F 为**满射**; 若 F 既是单射又是满射, 则称 F 为**双射或可逆映射**, 此时 F 实现 X 与 Y 的元之间的一一对应. 若 F 是双射, 则每个 $y\in Y$ 唯一地对应一个 $x\in X$, 使得 $y=Fx$, 称此对应为 F 的**逆映射**, 记作 F^{-1}, 即

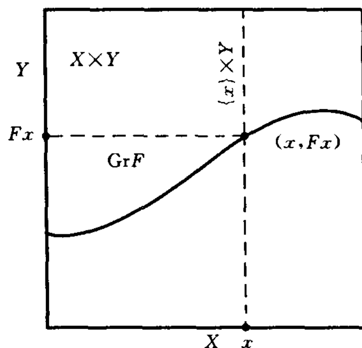


图 1-1

$$F^{-1}: Y\to X,\quad Fx\to x.$$

自然, F^{-1} 也就是函数 F 的**反函数**. 若 $\varnothing\neq A\subset X$, 则称映射

$$A\to Y,\quad x\to Fx$$

为 F 在 A 上的**限制**, 记作 $F|A$. 若某个映射 F_0 是 F 的限制, 则称映射 F 为 F_0 的**扩张**, 记作 $F_0\subset F$. 以 $i: A\subset X$ 记映射 $A\to X, x\to x$, 称它为**包含映射**或内射; 当 $A=X$ 时称上述的 i 为**单位映射**或恒同映射, 记作 I 或 1_X.

给定映射 $F: X\to Y$ 与 $G: Y\to Z$, 可唯一地构成**复合映射** GF (或写作 $G\circ F$):

$$GF: X\to Z,\quad x\to G(Fx).$$

若 F 是双射, 则必定

$$F^{-1}F = 1_X, \quad FF^{-1} = 1_Y.$$

反之,若存在映射 $G: Y \to X$,使得

$$GF = 1_X, \quad FG = 1_Y, \tag{10}$$

则易证明 F 必为双射且 $G = F^{-1}$. 因此,式(10)是 $G = F^{-1}$ 的充要条件. 一般地,GF 是单射 $\Rightarrow F$ 是单射; GF 是满射 $\Rightarrow G$ 是满射. 这些事实是基本而常用的.

给定映射 $F: X \to Y, A \subset X, B \subset Y$, 约定

$$FA = \{Fx : x \in A\}, \quad F^{-1}B = \{x : Fx \in B\}. \tag{11}$$

称 FA 为 A 在映射 F 下的**像**,称 $F^{-1}B$ 为 B 关于 F 的**原像**. 任给 $y \in Y, F^{-1}\{y\}$ 就记作 $F^{-1}(y)$; 显然 $F^{-1}(y) \neq \varnothing \Leftrightarrow y \in FX$. 式(11)实际上定义出两个"集映射"

$$2^X \to 2^Y, A \to FA \text{ 与 } 2^Y \to 2^X, B \to F^{-1}B,$$

称为 F 的**导出集映射**,就分别记为 F 与 F^{-1}, 只是注意此处 F^{-1} 并不表示 F 的逆映射. 关于像与原像的以下结果是常用的:

$$A \subset F^{-1}B \Leftrightarrow FA \subset B; \tag{12}$$

$$\begin{cases} A \subset F^{-1}FA, FF^{-1}B \subset B, \\ FF^{-1}B = B \Leftrightarrow B \subset FX; \end{cases} \tag{13}$$

$$F(\bigcup A_i) = \bigcup FA_i, \quad F(\bigcap A_i) \subset \bigcap FA_i; \tag{14}$$

$$\begin{cases} F^{-1}(\bigcup B_i) = \bigcup F^{-1}B_i, F^{-1}(\bigcap B_i) = \bigcap F^{-1}B_i, \\ F^{-1}B^c = (F^{-1}B)^c; \end{cases} \tag{15}$$

$$(GF)^{-1}C = F^{-1}G^{-1}C, \tag{16}$$

以上 $A, A_i \subset X, B, B_i \subset Y (i \in I), C \subset Z, G: Y \to Z$. 注意式(15)表明 F^{-1} 完全保持集运算(试与式(14)对照),这是一个极有意义的事实,今后将多次用到这一点.

注意,若 F 与 F_0 皆为从 X 到 Y 的映射,则 $F = F_0 \Leftrightarrow \mathrm{Gr}F = \mathrm{Gr}F_0$, 因而一映射完全由其图像所决定. 在这个意义上,不妨将 F 与 $\mathrm{Gr}F$ 视为等同. 这种理解导致映射概念的进一步拓广.

1.1.4 定义 设 X 与 Y 是两个非空集. $X \times Y$ 的任一子集 R 称为从 X 到 Y 的一个**关系**,当 $(x,y) \in R$ 时说 x 与 y 为 **R 相关**,记为 xRy. 任给 $R \subset X \times Y$, 称

$$R^{-1} \triangleq \{(y,x) : (x,y) \in R\} \tag{17}$$

为 R 的**逆关系**. 对 $A \subset X$, 约定(对照式(11))

$$\begin{cases} R(A) = \{y : (a,y) \in R(\exists\, a \in A)\}, \\ R(x) = R(\{x\})(x \in X). \end{cases} \tag{18}$$

分别称 $R(X)$ 与 $D(R) \triangleq R^{-1}(Y)$ 为 R 的值域与定义域. 若 $R \subset X \times Y, S \subset Y \times$

Z，则称

$$S \circ R = \{(x,z): \exists\, y \in Y, \text{使}(x,y) \in R, (y,z) \in S\} \tag{19}$$

为 S 与 R 的**复合关系**.

若 $\varnothing \neq R \subset X \times Y$，则 R 唯一确定如下映射：

$$D(R) \to 2^Y, \quad x \to R(x). \tag{20}$$

不妨就用 R 记映射(20)，并将 $R(x)$（或 $R(x)$ 中的元）看作 R 在 x 的值. 在这个意义上，R 是一个**集值映射**或**多值映射**，R 成为通常映射的充要条件是每个 $R(x)$ 仅含一个元. 多值映射概念在现代数学中被广泛使用. 容许考虑多值映射的主要好处之一是，一多值映射 R 的逆映射（即依式(17)的逆关系 R^{-1}）恒存在（一般也是多值的），且与"正映射" R 处于对等地位. 而通常映射则无此优点.

设 $R \subset X \times X$，称 R 为 X 上的一个**二元关系**. 例如，所谓**对角线**

$$\Delta = \Delta_X = \{(x,x): x \in X\} \tag{21}$$

就是 X 上的一个二元关系，它正是单位映射 1_X 的图像. Δ 是"复合"运算的单位元：若 $S \subset X \times Y, T \subset Y \times X$，则

$$S \circ \Delta = S, \quad \Delta \circ T = T.$$

若 R 满足以下条件：

(i) 自反性：$\Delta \subset R(\Leftrightarrow xRx(\forall\, x \in X))$；

(ii) 对称性：$R = R^{-1}(\Leftrightarrow xRy$ 恒推出 $yRx)$；

(iii) 传递性：$R \circ R \subset R(\Leftrightarrow$ 若 xRy, yRz，则 $xRz)$，

则称 R 为 X 上的一个**等价关系**. 若 $R \subset X \times X$ 是一等价关系，$x,y \in X$，则 $R(x)$ 与 $R(y)$ 要么互不相交，要么重合，称 $R(x)$ 为 x 所属的 R 等价类或简称为**等价类**，任何 $y \in R(x)$（包括 x）都可称为等价类 $R(x)$ 的**代表元**. 于是，X 可分解为相异等价类的不交并. 等价类的全体称为 X 关于 R 的**商集**，记作 X/R；称映射

$$P: X \to X/R, \quad x \to R(x) \tag{22}$$

为**投影**或**自然投影**. 因 $Px = Py \Leftrightarrow xRy$，故 R 与 P 相互唯一决定.

1.1.5 命题 对于 $R \subset X \times X$ 以下条件互相等价：

(i) R 是 X 上的一个等价关系；

(ii) 存在满射 $F: X \to Y$，使得 $R = F^{-1} \circ F$，即

$$xRy \Leftrightarrow Fx = Fy \ (x,y \in X);$$

(iii) 存在一组互不相交的非空集 $\mathscr{D} = \{D_i : i \in I\}$，使得 $X = \bigcup D_i$，且 $xRy \Leftrightarrow x$ 与 y 同属某个 D_i；必定 $\mathscr{D} = X/R$.

证 (i)$\Leftrightarrow$(ii). 若 R 是等价关系，P 是投影（依式(22)），则显然 P 为满射，且 $R = P^{-1} \circ P$. 反之，若 $F: X \to Y$ 是满射，$R = F^{-1} \circ F$，则显然 xRx；

$$xRy \Rightarrow Fx = Fy \Rightarrow yRx;$$

$$xRy, yRz \Rightarrow Fx = Fy = Fz \Rightarrow xRz,$$

可见 R 是等价关系.

(i)⇔(iii)是明显的. □

在本书中,命题 1.1.5 将用作定义等价关系的主要依据. 命题中的 $R = F^{-1} \circ F$ 称为由 F 导出的等价关系.

通常以～代替字母 R 表示等价关系,即以 $x \sim y$ 记 xRy,这一记号突出关系～是"相等"的一种推广. 其次,通常以 $\tilde{x}$ 或 $[x]$ 记 x 所属的～等价类,这意味着 $x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$. 可见,利用等价类概念,从～关系过渡到相等关系.

C. 基数

一个数学系统的复杂程度,显著地依赖于与之相关的某些集所含元素的多少,这在现代数学(尤其是拓扑学)中是一个被普遍注意到的基本事实. 显然,描述一集所含元素的多少有赖于该集与其他集的比较,而比较的方法则基于一定映射的存在性.

1.1.6 定义　设 A, B 是两个集. 若存在一个从 A 到 B 的双射,则说集 A 与 B 有相同的**基数**,约定以 $|A|$ (或 $|B|$)记这个共同的基数. 若存在一个从 A 到 B 的单射,则约定 $|A| \leqslant |B|$. 若 $|A| \leqslant |B|$,但 $|A| \neq |B|$ (这意味着不存在从 A 到 B 的双射),则说 A 的基数小于 B 的基数,写作 $|A| < |B|$.

若 A 含有 n 个元,则认定 $|A| = n$; 约定 $|\varnothing| = 0$. 因此有限集的基数就是它所含元素的个数. 鉴于此,即使对无限集 A,通常也将基数 $|A|$ 想象成某个"无限数",并记以某个字母,如 α,且说" A 含有 α 个元". 这样,基数可看作自然数的推广,它继承了自然数的主要性质之一.

1.1.7 定理　设 α, β 是两个基数,则关系 $\alpha < \beta, \alpha = \beta, \beta < \alpha$ 三者恰有一个成立.

关于上述定理的证明可参考文献[4].

由以上定理特别推出:若 $\alpha \leqslant \beta$ 且 $\beta \leqslant \alpha$,则 $\alpha = \beta$. 这一结论常用来判定两基数相等.

无限集的基数称为**无限基数**. 两个最重要的无限基数是无限可数基数 ω 与**连续统基数** c,它们定义为

$$\omega = |\mathbf{N}|, \quad \mathrm{c} = |\mathbf{R}|. \tag{23}$$

给定集 A,若 $|A| \leqslant \omega$,则称 A 为**可数集**,或说 A 有可数多个元. 注意有限集被归入可数集之内,这一规定不免有些缺点,但似乎利大于弊. 可直接看出,非空集 A 为可数集的充要条件是: A 的元可排列成一个(有限或无限)序列. 不过,直接用这一条件来判定可数性并不方便. 对于可数性的判定,以下结果是常用而有效的.

1.1.8 定理　(i) 设 $F: A \to B$ 是一映射. 若 A 是可数集,则 FA 亦为可数

集;若 F 为单射且 B 为可数集,则 A 为可数集.

(ii) 可数个可数集的并及有限个可数集的积集是可数集.

(iii) 若 $I_n(n=1,2,\cdots)$ 是一列可数集,则如下形式的集 A 是可数集:

$$A=\{x_{i_1i_2\cdots i_n}:i_k\in I_k,k=1,2,\cdots,n,n=1,2,\cdots\}.$$

(iv) 若 A 为可数集,则 A 的有限子集之全体是一可数集.

利用定理1.1.8,可得到一些最常用的可数集的例子,如有理数集 $\mathbf{Q}$、n 维有理点集 $\mathbf{Q}^n$、有理系数多项式集等. 定理1.1.8中最具一般性的结论无疑是(iii). 可将(iii)表述为:若一对象取决于有限个因素(因素个数可以不定),每个因素有可数种选择,则此对象仅有可数种选择. 本书中将多次用到这一结论. 在作这类应用时,通常并不对所论集的构成作详细描述. 这实际上意味着,定理1.1.8的结论被看作数学中的常识!

在数学理论中一个普遍的规则是:尽可能使用"较小"的集,以降低问题的复杂性. 基数概念使得上述思想获得严格意义:应尽可能使用基数较小的集. 在无限集范围内,可数集就是最小的集!可数集的意义就在于此. 在本书中,将有多次机会体验到可数集的好处.

对于基数的进一步讨论进入集论的深奥领域,已非本书所必需. 此处只是指出,从有限集过渡到无限可数集,进而到不可数集,是两次重大飞跃,每次飞跃均使涉及这些集的数学问题的复杂性显著提升. 一个典型例子是:有限维空间问题通常属于常识的范围;可数维空间(空间维数有多种定义且并不简单,此处不拟细论)则已进入一个艰难的领域,但仍然富有成果;不可数维空间则是人们涉足不多的陌生领域.

拓扑学的一些异常深刻的结果涉及大基数的处理,本书并不打算到达这种境地. 不过,熟悉关于基数的以下结果还是有益的,且并不困难.

1.1.9 定理 当 $\alpha=|A|$ 时约定 $2^\alpha=|2^A|$,则 $\alpha<2^\alpha$. 特别,有 $\omega<2^\omega=\mathrm{c}$. ω,c 依式(23).

由此可见,c 是一个不可数基数;或等价地,实数集 $\mathbf{R}$ 是不可数集. 至于 c 是否为最小的不可数基数,则是一个导致深奥研究的困难问题.

D. 集族

鉴于拓扑正是满足特定条件的集族,在本书中集族将起基本作用是很自然的. 集族的特殊之处在于它以集为元素,因而可以谈到它的由一定集运算性质决定的内部结构,且形成一些与之相应的特殊概念与记号. 下面介绍的一些术语与记号在拓扑学中是常用的.

以下设 X 是一给定的非空集,$\mathscr{A},\mathscr{B}\subset 2^X$. 约定

$$\mathscr{A}^\#=\bigcup\mathscr{A}=\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A,\quad \bigcap\mathscr{A}=\bigcap_{A\in\mathscr{A}}A. \tag{24}$$

若 $\mathscr{A}=\varnothing$，则约定 $\mathscr{A}^{\#}=\varnothing$，$\bigcap\mathscr{A}=X$[①]. 由 $\mathscr{A}$ 可构成两个新的集族：

$$\begin{cases}\mathscr{A}'=\{A^c : A\in\mathscr{A}\},\\ \mathscr{A}^*=\{\bigcap\mathscr{B} : \mathscr{B}\text{ 是 }\mathscr{A}\text{ 的有限子族}\}.\end{cases}\tag{25}$$

因已约定当 $\mathscr{B}=\varnothing$ 时 $\bigcap\mathscr{B}=X$，故 $X\in\mathscr{A}^*$. 若 $\varnothing\,\overline{\in}\,\mathscr{A}^*$，则称 $\mathscr{A}$ 为**有限相交族**，或说 $\mathscr{A}$ 具有有限交性质，即 $\mathscr{A}$ 中任何有限个集有非空交. 注意 $\mathscr{A}\subset\mathscr{A}^*$，因而 $\mathscr{A}^*$ 是一个比 $\mathscr{A}$ 更大的集族. $\mathscr{A}^*$ 比 $\mathscr{A}$ 优越之处是，$\mathscr{A}^*$ 对于有限交运算是封闭的，这一性质在拓扑学中有很大重要性(如开集族、闭集族与邻域系都有此性质). 在两个集族 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 之间可界定如下两个重要关系：

$$\begin{cases}\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}\Leftrightarrow\forall\, B\in\mathscr{B},\exists\, A\in\mathscr{A} : A\subset B,\\ \mathscr{A}\prec\mathscr{B}\Leftrightarrow\forall\, A\in\mathscr{A},\exists\, B\in\mathscr{A} : A\subset B.\end{cases}\tag{26}$$

$\mathscr{A}\vdash\{B\}(B\subset X)$ 简写作 $\mathscr{A}\vdash B$. 粗略地说，$\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}$ 意味着与 $\mathscr{B}$ 比较 $\mathscr{A}$ 含有更小的集. 有趣的是，看来很不相同的关系 $\vdash$ 与 $\prec$ 之间有很简单的转换关系：

$$\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}\Leftrightarrow\mathscr{B}'\prec\mathscr{A}'.\tag{27}$$

系统地使用记号 $\vdash$ 与 $\prec$，可将一些涉及集族的复杂概念或命题表达得异常简洁且特别富有启发性. 鉴于此，本书将适当地使用这些记号. 体会到它们的简化效果之后，你会乐意接受它们的.

下面以滤子概念作为例子来说明上述记号的使用. 滤子本身在拓扑学中亦有特殊的应用价值.

1.1.10 定义　若非空集族 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 满足条件：

(F_1) $\varnothing\,\overline{\in}\,\mathscr{A}$；

(F_2) $\mathscr{A}^*=\mathscr{A}(\Leftrightarrow\forall\, A,B\in\mathscr{A}$，有 $A\cap B\in\mathscr{A})$；

(F_3) 由 $\mathscr{A}\vdash A\subset X$ 推出 $A\in\mathscr{A}$($\Leftrightarrow$ 由 $\mathscr{A}\vdash\mathscr{B}\subset 2^X$ 推出 $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$)，

则称 $\mathscr{A}$ 为 X 上的一个**滤子**. 若 $\mathscr{A}$ 是一个滤子，$\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$ 满足条件 $\mathscr{B}\vdash\mathscr{A}$，则称 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{A}$ 的一个**滤基**；若 $\mathscr{B}^*\vdash\mathscr{A}$，则称 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{A}$ 的一个**子滤基**.

前面说到可以考虑集族的内部结构，滤子正是我们遇到的第一种具有内部结构的集族. 条件 $(F_1)\sim(F_3)$ 中核心的条件是 (F_2)，它要求 $\mathscr{A}$ 对有限交运算封闭. 至于条件 (F_1)，其作用是用以排除 $\mathscr{A}=2^X$ 这种平凡的情况；条件 (F_3) 使得 $\mathscr{A}$ 能包含那些"比 $\mathscr{A}$ 中某个集大"的集，从而使 $\mathscr{A}$ 具有某种完全性. 注意仅含一个集 X 的集族 $\{X\}$ 就是一个滤子. 一个不那么平凡的例子是：

$$\mathscr{A}=\{A : x_0\in A\subset X\},$$

其中 $x_0\in X$ 是取定的. 不过，重要的不是举出一些滤子的例子，而是给出构成滤子的某个一般方法. 下面的简单结果即提供了一个这样的方法.

---

① 考虑到 $x\in\mathscr{A}^{\#}\Leftrightarrow\exists\, A\in\mathscr{A} : x\in A$，$x\in\bigcap\mathscr{A}\Leftrightarrow\forall\, A\in\mathscr{A} : x\in A$，这些结论可从定义1.1.1推出，而不只是一种"约定".

1.1.11 命题 设非空集族 $\mathscr{B} \subset 2^X$ 满足条件:

(i) $\varnothing \overline{\in} \mathscr{B}$;

(ii) $\mathscr{B} \vdash \mathscr{B}^* (\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathscr{B}, \exists C \in \mathscr{B}: C \subset A \cap B)$,

则有唯一滤子 $\mathscr{A} \subset 2^X$ 以 $\mathscr{B}$ 为滤基. 若仅假定 $\mathscr{B}$ 是有限相交族,则存在唯一滤子 $\mathscr{A} \subset 2^X$ 以 $\mathscr{B}$ 为子滤基,且 $\mathscr{A}$ 是 X 上包含 $\mathscr{B}$ 的最小滤子(称为由 $\mathscr{B}$ 生成的滤子).

证 令 $\mathscr{A} = \{A : \mathscr{B} \vdash A \subset X\}$,则由条件(i)、(ii)推出 $\mathscr{A}$ 满足定义1.1.10中的条件(F_1)~(F_3),且显然 $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}, \mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$,故 $\mathscr{A}$ 是以 $\mathscr{B}$ 为滤基的滤子. 若仅假定 $\mathscr{B}$ 是有限相交族,则 $\mathscr{B}^*$ 必满足条件(i)、(ii),因而 $\mathscr{B}^*$ 是某个滤子 $\mathscr{A}$ 的滤基,于是 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的子滤基. 若 $\mathscr{A}_1$ 是 X 上的滤子且 $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}_1$,则

$$\mathscr{B}^* \subset \mathscr{A}_1^* = \mathscr{A}_1; \qquad (\text{用}(F_2))$$

$$\mathscr{A}_1 \vdash \mathscr{B}^* \vdash \mathscr{A}, \quad \mathscr{A}_1 \vdash \mathscr{A},$$

这推出 $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_1$ (用(F_3)). 故 $\mathscr{A}$ 是包含 $\mathscr{B}$ 的最小滤子. □

以一个简单的例子解释命题1.1.11的应用. 令

$$\mathscr{B} = \{(\alpha, \beta) : \alpha < 0 < \beta\},$$

则 $\mathscr{B}$ 显然满足命题1.1.11中的条件(i)和(ii),因此 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbf{R}$ 上某个滤子 $\mathscr{A}$ 的滤基. 今后将看到(见2.1B),$\mathscr{A}$ 就是点0的邻域滤子(关于 $\mathbf{R}$ 的通常拓扑).

1.2 序 结 构

序结构并不是本书的考虑对象,但有关它的基本知识是学习拓扑所不可缺少的. 而且,序结构的公理系统是如此简单且富有直观性,为解释一般数学结构提供了最有效的例证,这对于理解即将展开的拓扑空间理论不无启示作用.

A. 数学结构

如容易观察到的,现代数学并不直接处理现实的对象与过程,而是处理已在某种程度上抽象化了的数学模型,这种模型依据特定方式被赋予一定的结构,因而可称之为数学结构. 在最一般的意义上,现代数学正是以各种数学结构为研究对象的学科. 像实数系、Euclid 空间与向量空间这类已被充分研究的数学结构,你已从相关课程的学习中熟悉了. 而对于一般地描述数学结构,可能并无明确的观念,但它显然是一个有趣且值得关注的问题. 无疑,我们面对的问题并不容易,此处无法作出一个严格的描述,而仅满足于一个最粗略的勾画.

一个**数学结构**(或称**数学系统**)包含以下三个要素.

(i) 对象集 X 或若干对象集 $X, Y, \cdots$,它提供构成系统的基本单元或元素.

(ii) 一组关系或映射 $\{R_i\}$,每个 R_i 描述了对象间的某种关联,从而在原本

为一块白板的对象集上赋予了一定的组织性或结构.

(iii) 一组公理 $\{A_j\}$，它们规定了关系 R_i 所应服从的规则.

概而言之，数学结构就是由服从一定公理的关系组织起来的一群对象. 在这里，真正重要的是体现系统结构或规则的公理，而对于关系与对象的具体解释则是不重要的. 这一点对于理解现代公理化数学至为重要，在本书中，你将有足够的机会来体会这一点.

上面所说的由三要素组成的数学结构，原则上涵盖了现代数学已经及可能处理的所有系统，作为一种理论构建模式，其发展空间实际上是无限的. 以上描述仅仅指明了数学结构的最一般特征，这丝毫也不限制各别的数学系统在结构上的多样性与丰富性.

数学结构的例子可以说能随手拈来. 例如，由定义 1.1.10 界定的滤子就是一种数学结构：此处用到两个对象集 2^X 与 $\mathscr{A}$；唯一考虑的关系是 $A \in \mathscr{A}(A \in 2^X)$，此关系由公理$(\mathrm{F}_1)\sim(\mathrm{F}_3)$限定，正是这三条公理构成滤子概念中最本质的东西. 至于 $\mathscr{A}$ 中的集如何选定，在滤子的一般讨论中是既不必关心也无法确定的. 唯其如此，才可能将滤子概念作最广泛的应用. 当然，滤子概念的每一次特殊应用，都依赖于对 $\mathscr{A}$ 的具体界定及对条件$(\mathrm{F}_1)\sim(\mathrm{F}_3)$的严格检验.

一般来说，一个系统的结构愈简单(这意味着用到较少的对象集、较少的关系与较少的公理)，就愈容易得到具体实现，且愈可能成为更复杂系统的基础，因而愈具有普遍价值. 被公认为最具普遍价值的三种基本数学结构是：序结构、代数结构与拓扑结构，其他数学结构大多是这些基本结构的综合与细化. 其中的拓扑结构正是本书的主题，而序结构与代数结构在本书中亦有辅助意义，因而在本节与下节中对其作一初步介绍.

B. 序结构

从对实数的大小顺序、集合的包含关系等特例的观察中，你已获得对序概念的初步印象. 现在的任务是用一组公理来完成对序关系的抽象描述.

1.2.1 定义　设 X 是一非空集，$\leqslant$是 X 上的一个二元关系(这意味着对某些 $x,y \in X$ 规定了 $x \leqslant y$，参看定义 1.1.4)，它满足以下公理：

(A_1) 自反性：$x \leqslant x(x \in X)$；

(A_2) 传递性：$x \leqslant y$ 且 $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z(x,y,z \in X)$，

则称$\leqslant$为 X 上的一个拟序. 若进而要求拟序$\leqslant$满足公理：

(A_3) 反对称性：$x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x \Rightarrow x = y(x,y \in X)$，

则称$\leqslant$为 X 上的一个**半序**或**偏序**. 若半序$\leqslant$还满足公理：

(A_4) 完全性：$\forall x,y \in X, x \leqslant y$ 与 $y \leqslant x$ 必居其一，

则称$\leqslant$为**全序**. 当$\leqslant$是 X 上的拟序、半序与全序时，分别称 $(X,\leqslant)$ 为拟序集、半序集与全序集. 若拟序$\leqslant$满足公理：

(A_5) 有向性：$\forall x,y\in X,\exists z\in X$，使得 $x\leqslant z,y\leqslant z$，
则称 $(X,\leqslant)$ 为**有向集**.

当说到 X 上的序或序关系时，通常泛指如上定义的关系中的任一种，其具体含义由上下文确定. 对于一个拟序$\leqslant$，也使用如下的方便记号：

$$x\geqslant y\Leftrightarrow y\leqslant x;$$

$$x<y\Leftrightarrow x\leqslant y\neq x\Leftrightarrow y>x.$$

应当指出，在定义 1.2.1 中尽管我们用了熟悉的记号$\leqslant$，但它未必就有通常的"小于等于"的意义，此处不过是借用了记号$\leqslant$而已，用一个稍不同的记号，例如$\preceq$，也许更为恰当. 不过，记号$\leqslant$毕竟强烈地昭示出，关系 $x\leqslant y$ 反映了 x 与 y 之间的某种顺序. 至于排序的标准，在具体场合也许是"大小"、"多少"、"强弱"、"优劣"，…，而在定义 1.2.1 中则无任何解释，这正好为实际应用时作具体界定留下了充分的选择余地. 在处理具体的序关系时，$\leqslant$当然可能依情况代之以更习惯的记号.

现在来看一些常见的例子，其中一些例子本书将多次用到，值得特别留意.

1.2.2 例 (i) 取 $X=\mathbf{R}^n$，任给 $x=(x_i),y=(y_i)\in\mathbf{R}^n$，约定

$$x\leqslant y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i(1\leqslant i\leqslant n).\tag{1}$$

直接看出，如此定义的关系$\leqslant$满足公理(A_1)～(A_3)(依定义 1.2.1，下同)，因而$\leqslant$是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个半序，称为**向量序**，它是数学中用得最多的半序之一. 若 $n=1$，则$\leqslant$就是通常的"小于等于"，它显然是一个全序. 若 $n>1$，则$\leqslant$不再是全序. 例如在 $\mathbf{R}^2$ 中，点$(1,0)$与$(0,1)$是不能依$\leqslant$比较的.

(ii) 设 X 是任给的集. 则 2^X 上的二元关系$\subset$(或$\supset$)显然是自反的、传递的与反对称的，因而是一个半序，它是本书中用得最多的半序之一. 易见$\subset$(或$\supset$)不是全序，除非 $|X|\leqslant 1$. 不过，2^X 的某些子集可能是全序的. 2^X 依序$\subset$的任何全序子集称为**集套**. 任给 $A,B\subset X$，显然有

$$A\cap B\subset A\subset A\cup B,$$

$$A\cap B\subset B\subset A\cup B,$$

可见 $(2^X,\subset)$ 与 $(2^X,\supset)$ 均为有向集.

(iii) 设 X 是任给非空集，$\mathscr{B}\subset 2^X$ 是一滤基(依命题1.1.11)，则 $(\mathscr{B},\supset)$ 是一半序集. 因 $\forall A,B\in\mathscr{B},\exists C\in\mathscr{B}:C\subset A\cap B$，故 $(\mathscr{B},\supset)$ 是一有向集. 特别，任何滤子以$\supset$为序是一有向集. 这是一个极有价值的事实，本书中将多次用到这一点.

(iv) 设 X 是任给非空集，$\mathscr{A}$ 是 X 的有限子集之全体，则 $(\mathscr{A},\subset)$ 是一半序集且为有向集.

(v) 任给非空集 Ω，以 X 记 2^Ω 的子集之全体，则由 1.1 节式(26)定义的关系$\vdash$是 X 上的一个拟序，它一般不是半序. 值得注意的是，若以 Y 记 Ω 上滤子之

全体,则 $(Y, \vdash)$ 是一半序集. 事实上,若 $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$ 是滤子,$\mathscr{A} \vdash \mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$,则 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ (用定义 1.1.10 中的(F_3)),从而 $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

(vi) 给定拟序集 $(X_1, \leqslant_1)$ 与 $(X_2, \leqslant_2)$,在积集 $X = X_1 \times X_2$ 中定义

$$(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leqslant_1 y_1 \text{ 且 } x_2 \leqslant_2 y_2, \tag{2}$$

则直接看出 $(X, \leqslant)$ 是一拟序集. 若 $(X_i, \leqslant_i)(i = 1,2)$ 均为半序(或有向)集,则易验证 $(X, \leqslant)$ 亦是半序(或有向)集.

(vii) 虽然式(2)是在积集中导入序的主要方式,但还可取更简单的方法:定义 (X_1, X_2 依(vi),实际上并不要求 X_2 是拟序集)

$$(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leqslant_1 y_1 \quad (x_i, y_i \in X_i, i = 1,2) \tag{3}$$

则 $(X, \leqslant)$ 亦为拟序集,当 $(X_1, \leqslant_1)$ 是有向集时 $(X, \leqslant)$ 亦为有向集. 这种定义拟序的方式初看起来是过于粗略些,似无意义,但亦不失为有用,在本书中就将用到.

最后这个例子表明,拟序的定义有很大灵活性.

再回到关于序结构的一般讨论. 以下设 $(X, \leqslant)$ 是给定的半序集. 使用记号 $\leqslant$ 不免使人情不自禁地将一些涉及实数大小关系的结论搬到 X 中来,这可能导向谬误. 例如,即使 $A \subset X$ 是一有限集,也不能不加思索地断定 A 有一个"最大元"! 不过,对于实数大小关系的直觉观念,还是为研究半序提供了主要的启示. 下面的概念大都是从实直线上一些熟知的概念推广过来的.

1.2.3 定义 设 $(X, \leqslant)$ 是一半序集,$\varnothing \neq A \subset X$. 若 $b \in X, A \leqslant b$ (这意味 $\forall a \in A$,有 $a \leqslant b$),则称 b 为 A 的**上界**. 若 b 是 A 的上界,且对 A 的任何上界 b' 有 $b \leqslant b'$,则称 b 为 A 的最小上界或**上确界**,记作 $\sup A$. 若 $A \leqslant b \in A$,则称 b 为 A 的**最大元**. 若 $b \in A$,且当 $b \leqslant a \in A$ 时必有 $a = b$,则称 b 为 A 的**极大元**.

类似地,可定义 A 的**下界**、**下确界**(记作 $\inf A$)、**最小元**与**极小元**. 顺便指出,若 $(X, \leqslant)$ 是拟序(或半序、全序)集,则 $(X, \geqslant)$ 亦为拟序(或半序、全序)集;所有涉及 $\leqslant$ 的概念与结论,反转序向(这意味着以 $\geqslant$ 代 $\leqslant$)之后一般依然有效. 在处理序关系时,$\leqslant$ 与 $\geqslant$ 的这种对偶性是不可不知的.

直接从定义 1.2.3 看出,最大元必定是极大元与上确界;在全序集中最大元与极大元等价. 除此之外,在最大元、极大元与上确界三者之间不存在其他必然联系. 如以下简单例子:设在 2^X 中以 $\subset$ 为半序,$A, B \subset X$ 互不包含,$\mathscr{A} = \{A, B\}$,则 A, B 均为 $\mathscr{A}$ 的极大元,$A \cup B$ 是 $\mathscr{A}$ 的上确界,$\mathscr{A}$ 没有最大元. 一般地,对任何 $\mathscr{A} \subset 2^X$,依关系 $\subset$,$\mathscr{A}^{\#}$ (依 1.1 节式(24))是 $\mathscr{A}$ 的上确界,而 $\bigcap \mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}$ 的下确界.

C. 集论公理

序关系的重要应用之一,是用来表述某些集论公理. 我们已经申明,本书对

于集论问题持朴素观点,但还是不能完全避免使用集论公理,否则无法证明一些最重要的拓扑定理.对于最常用的集论公理的一定程度的熟悉,也是基本数学素养的一部分.

我们所关注的集论公理实质上只有一个,即如下的选择公理.

1.2.4 选择公理 设 $\{A_i : i \in I\}$ 是一族互不相交的非空集,则存在一个集 A,使得 A 与每个 $A_i(i \in I)$ 恰有一个公共元.

换一种更直观的说法就是:总可以从每个 A_i 中取出一元 $a_i(i \in I)$,这些 a_i 汇成一集 A.

从常识来看,选择公理似乎贫乏得令人不屑一顾,很难想象能对它提出什么有力的反驳.正因为如此,选择公理才被普遍接受.实际上,人们常在未觉察到的情况下用了选择公理.然而,集论中发现的一些事实使人们对于选择公理的信赖不再那么绝对化.数学家找到了一系列与选择公理逻辑上等价的命题,后者呈现出不那么显而易见的面貌,以致人们惊讶于它们何以被作为公理接受.正是这些命题为许多深刻数学定理(其中包括许多拓扑学定理)的证明提供了关键依据,而这就使得与之等价的选择公理更加不可缺少.下面仅介绍选择公理的两个等价命题,其中之一就是著名的极大原理.

1.2.5 极大原理 设 $(X, \leqslant)$ 是一半序集,其中的每个全序子集有上界,则 X 至少有一极大元.

从极大原理直接推出以下命题.

1.2.6 命题 设 X 是一非空集,$\mathscr{A} \subset 2^X$ 是一非空族.当 $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$,$\mathscr{B}$ 依$\subset$是全序的(即 $\forall A, B \in \mathscr{B}$,有 $A \subset B$ 或 $B \subset A$)时,有 $\mathscr{B}^{\#} \in \mathscr{A}$.则$\mathscr{A}$ 有一极大元 A,即 $A \in \mathscr{A}$,且 $\forall B \in \mathscr{A}$,有 $A \not\subset B$,除非 $A = B$.

在拓扑学中,经常以命题1.2.6的形式应用极大原理.

为给出选择公理的另一等价形式,首先给出一些相关概念.设 $(X, \leqslant)$ 是一全序集.若 X 的每个非空子集必有最小元,则称$\leqslant$为**良序**,称 $(X, \leqslant)$ 为良序集.自然数集$\mathbf{N}$ 依通常的序显然是良序集,而实数集则不是.良序集的重要性在于:基于自然数集的数学归纳法,可推广为基于一般良序集的所谓**超限归纳法**.设 $(I, \leqslant)$ 是一良序集,$P_i(i \in I)$ 是一族命题.假设:

(i) 对于 I 的最小元 i_0,P_{i_0} 成立;

(ii) 若 $i \in I$,$P_j(i > j \in I)$ 均成立,则 P_i 成立.

今证明每个 $P_i(i \in I)$ 成立.令 $J = \{i \in I : P_i \text{不成立}\}$.若 $J \neq \varnothing$,则 J 有最小元 i,由假设(i)必定有 $i_0 < i$.若 $i > j \in I$,则 P_j 必成立.于是由假设(ii)推出 P_i 成立,得出矛盾.因此 $J = \varnothing$,即每个 P_i 成立.

为使推广后的归纳法能充分发挥作用,需要有足够多的良序集,而这由以下公理保证.

1.2.7 良序公理　任何非空集上都存在一个良序.

本书将有几次用到极大原理.为对极大原理的应用有点初步体验,不妨现在就来考虑一个例子.此处所得的结论今后也是有用的.

1.2.8 定理　设 X 是给定非空集.

(i) 任给滤子 $\mathscr{A}\subset 2^X$,$\mathscr{A}$ 必含于某个极大滤子$\mathscr{B}$,即 $\mathscr{B}\subset 2^X$ 是一个滤子,$\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$,且当滤子 $\mathscr{B}_1\subset 2^X$ 满足 $\mathscr{B}\subset\mathscr{B}_1$ 时必有 $\mathscr{B}=\mathscr{B}_1$. 如上的$\mathscr{B}$ 称为**超滤子**.

(ii) 若 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 是一个超滤子,$A\subset X$,则 $A\in\mathscr{A}$ 或者 $A^c\in\mathscr{A}$.

证　(i) 令 $\Sigma=\{\mathscr{B}\subset 2^X:\mathscr{B}$ 是滤子且 $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}\}$,则 $\mathscr{A}\in\Sigma$,可见 Σ 非空. Σ 依$\subset$是一半序集.若 Σ_1 是 Σ 的全序子集,$\mathscr{B}=\Sigma_1^\#$,则显然 $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$,且$\mathscr{B}$ 满足定义 1.1.10 中的条件$(F_1)(F_3)$.若 $A,B\in\mathscr{B}$,则有 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2\in\Sigma_1$,使得 $A\in\mathscr{B}_1$,$B\in\mathscr{B}_2$. 可设 $\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}_2$,于是 $A\cap B\in\mathscr{B}_2\subset\mathscr{B}$. 这表明$\mathscr{B}$ 满足定义1.1.10 中的条件(F_2),因此$\mathscr{B}$ 是一个滤子,从而 $\mathscr{B}\in\Sigma$. 于是由命题1.2.6 知 Σ 有一极大元$\mathscr{B}$,$\mathscr{B}$ 就是包含$\mathscr{A}$ 的超滤子.

(ii) 不妨设 $A\overline{\in}\mathscr{A}$. 于是 $\forall B\in\mathscr{A}$,有 $B\not\subset A$ (用定义1.1.10(F_3)),即 $B\cap A^c\neq\varnothing$. 令 $\mathscr{B}=\mathscr{A}\cup\{A^c\}$,则$\mathscr{B}$ 是有限相交族,因而必含于某个滤子 $\mathscr{B}_1$ (用命题1.1.11).但 $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}\subset\mathscr{B}_1$,故由$\mathscr{A}$ 为超滤子推出 $\mathscr{A}=\mathscr{B}_1$,因此 $A^c\in\mathscr{A}$.　□

1.3　代数系统

与本书的主要对象拓扑空间比较起来,代数系统具有迥然不同的性质.基本的差别是:有关代数系统的概念可通过施行有限次的运算或变换来描述,而不像拓扑结构那样涉及极限与连续性.然而,这样两类截然不同的数学结构,在其发展进程中却以惊人的深度互相联系着.联系的渠道主要有两条.其一是通过**拓扑代数系统**实现拓扑结构与代数结构的综合.现代数学中处于中心地位的数学系统大多是拓扑代数系统,如拓扑群、拓扑向量空间与拓扑环等.本书并不涉及这方面的内容,尽管作为例子提到的一些重要拓扑空间实际上已经是拓扑代数系统.其二是在拓扑研究中系统地使用代数工具,循这一方向发展为已成为拓扑学主流的**代数拓扑**.基于实际的考虑,本书仅涉及代数拓扑的最初步的内容.但为此也有必要集中地介绍将用到的那些代数知识.不过,本节更偏向于采用 1.2A 中描述一般数学结构时所用的观点,尽可能使这里所阐述的基本思想具有某种独立价值,而不仅仅被看作一点辅助知识.

A. 代数运算

类似于通常算术运算的演算广泛存在于数学的各个领域,这促使人们去考

虑一般的代数运算. 要使得这种一般的运算能涵盖所有已知的特殊运算，就必须排除加于运算的任何特殊性质，达到一个具有最少规定性的如下定义.

1.3.1 定义 设 X 是一个非空集. 称任何映射 $\sigma: X \to X$ 为 X 上的一个**一元运算**；称任何映射 $\varphi: X \times X \to X$ 为 X 上的一个**二元运算**[①].

以上定义似乎完全不留下通常所理解的加法、乘法之类运算的任何痕迹，这就为运算概念的具体应用留下了最大的空间. 或许，你更希望从一些实例获得对运算概念的切实感觉. 那么就让我们来看一些各个领域的例子.

一元运算的例子：

$$\mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad z \to \bar{z}; \qquad \text{（共轭运算）}$$
$$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \quad x \to \alpha x; \qquad \text{（数乘运算）}$$
$$\mathbf{R}^{n\times n} \to \mathbf{R}^{n\times n}, \quad A \to A^{\mathrm{T}}; \qquad \text{（转置运算）}$$
$$2^X \to 2^X, \quad A \to A^c, \qquad \text{（补运算）}$$

其中 α 是给定实数，$\mathbf{R}^{n\times n}$ 是 n 阶实方阵之全体.

二元运算的例子：

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad (x,y) \to x \vee y; \qquad \text{（取最大）}$$
$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad (x,y) \to x \wedge y; \qquad \text{（取最小）}$$
$$2^X \times 2^X \to 2^X, \quad (A,B) \to A \cup B; \qquad \text{（并运算）}$$
$$2^X \times 2^X \to 2^X, \quad (A,B) \to A \cap B; \qquad \text{（交运算）}$$
$$\mathbf{R}^{n\times n} \times \mathbf{R}^{n\times n} \to \mathbf{R}^{n\times n}, (A,B) \to AB. \qquad \text{（矩阵乘法）}$$

毫无疑问，一个运算仅当它服从一定规则时，才具有价值并成为研究对象. 运算规则由适当的代数系统来描述. 参照 1.2A 中关于数学结构的一般观点，可以将代数系统界定为包括如下三要素的系统：

(i) 一个对象集 X；

(ii) X 上的一组运算；

(iii) 一组公理，它表现为运算应服从的规则.

如同一般数学结构一样，对于一个抽象代数系统 X 而言，X 中元素的组成及其中运算的具体解释都是非本质的，而且也不是固定不变的. 例如，设代数系统 X 中定义了一元运算 $x \to \bar{x}$ 与二元运算 $(x,x') \to x + x'$，代数系统 Y 中定义了一元运算 $y \to y^*$ 与二元运算 $(y,y') \to yy'$. 我们并不能从二者表面上的差别断定它们是两种不同的代数系统. 须知，在一个抽象系统中，对于记号 $\bar{x}, x + x'$ 与 y^*, yy' 并未预设任何确定的解释. 要判定两个系统的异同，唯一的依据是它们所遵循的公理. 因此，唯有公理系统才是代数系统定义中真正本质的东西. 例如，设上面所述的系统 X 与 Y 分别满足如下公理：

① 原则上并无理由排除二元以上的运算. 但对于常见的代数系统，一元运算与二元运算是充分的.

(A_1) $x + x' = x' + x$,

(A_2) $\overline{x + x'} = \overline{x} + \overline{x'}$,

(A'_1) $yy' = y'y$,

(A'_2) $(yy')^* = y^*(y')^*$,

那么可以断定，公理(A_1)，(A_2)与(A'_1)，(A'_2)实质上并无区别，它们所不同的仅是记号而已. 鉴于此，可以说 X 与 Y 实际上是同一种代数系统.

由此可见，在描述或识别一个代数系统时，系统的公理组成是最值得关注的. 正是公理选择的多样性，决定了代数系统的多样性.

原则上，代数公理的选择有着广泛的可能性. 但从实际情况来看，常用的代数公理系统多半是少数几条熟悉规则的组合，这些规则表现为一定的运算律. 今将最常见的运算律表述于下. 为便于说明，设 X 上定义了一元运算 σ 与二元运算 φ,ψ；$x,y,z \in X$ 是任给的.

(i) **交换律**(对 φ)：$\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

(ii) **结合律**(对 φ)：$\varphi(\varphi(x,y),z) = \varphi(x,\varphi(y,z))$.

(iii) **分配律**(φ 对 ψ)：

$$\varphi(x,\psi(y,z)) = \psi(\varphi(x,y),\varphi(x,z)),$$
$$\varphi(\psi(x,y),z) = \psi(\varphi(x,z),\varphi(y,z)).$$

(iv) **分配律**(σ 对 φ)：

$$\sigma(\varphi(x,y)) = \varphi(\sigma(x),\sigma(y))$$
$$(\text{或 } \sigma(\varphi(x,y)) = \varphi(\sigma(y),\sigma(x))).$$

为使以上运算律具有更熟知的形式，最好借用平常的记号. 设

$$\sigma(x) = x^*,\quad \varphi(x,y) = xy,\quad \psi(x,y) = x + y,$$

则上述的(i)～(iv)可分别改写成：

(i) “乘法”交换律：$xy = yx$.

(ii) “乘法”结合律：$(xy)z = x(yz)$.

(iii) “乘法”对“加法”的分配律：

$$x(y + z) = xy + xz,\quad (x + y)z = xz + yz.$$

(iv) “$*$运算”对“乘法”的分配律：

$$(xy)^* = x^*y^*(\text{或}(xy)^* = y^*x^*).$$

将一种二元运算称为加法或乘法，并不是一个实质性问题，而只是一种技术性选择. 当然，仅当一种运算与平常的加法(或乘法)有较多类似之处时，选择加法(或乘法)这一名称才是恰当的，才具有某种启示意义而被人们接受.

下面的结果固然简单，但因其具有高度一般性而值得注意.

1.3.2 命题　设 φ 是 X 上的一个二元运算.

(i) X 上至多存在一个元 e，使得

$$\varphi(x,e) = x = \varphi(e,x) \quad (\forall\, x \in X). \tag{1}$$

(ii) 设 φ 满足结合律，$e \in X$ 满足条件(1). 则对任给 $x \in X$，至多存在一个元 $y \in X$，使得

$$\varphi(x,y) = e = \varphi(y,x). \tag{2}$$

证 (i) 若 e 与 e' 同时使恒等式(1)满足，则

$$e = \varphi(e',e) = e'.$$

(ii) 若 $y, y' \in X$ 均使恒等式(2)满足，则

$$\begin{aligned} y = \varphi(e,y) &= \varphi(\varphi(y',x),y) && (\text{用式}(2)) \\ &= \varphi(y',\varphi(x,y)) && (\text{用结合律}) \\ &= \varphi(y',e) = y'. && (\text{用式}(1)\text{、式}(2)) \end{aligned}$$ □

满足条件(i)的 e 称为运算 φ 的**单位元**或**幺元**；满足条件(ii)的 y 称为 x 的关于运算 φ 的**逆元**，当 x 的逆元存在时，称 x 为关于运算 φ 的**可逆元**. 若称 φ 为乘法，则将单位元与逆元(若存在)分别写作 e 与 x^{-1}；若称 φ 为加法，则将单位元与逆元(若存在)分别称为**零元**与**负元**，记作 0 与 $-x$.

单位元与逆元概念比你所想象的要出现得更广泛些. 例如考虑 2^X 中的并与交运算，X 是任给的集. 容易看出，空集 $\varnothing$ 是并运算的单位元，$A \subset X$ 关于并可逆 $\Leftrightarrow A = \varnothing$；$X$ 是交运算的单位元，X 又是关于交运算的唯一可逆元. 类似地，在 $J = [0,1]$ 中考虑运算 $\vee$ 与 $\wedge$，关于运算 $\vee$，0 是单位元也是唯一的可逆元；关于运算 $\wedge$，1 是单位元也是唯一的可逆元.

B. 群

群是只有一种运算的代数系统，似乎很简单，但实际上它能容纳惊人地丰富的理论，且有许多出人意料的应用.

1.3.3 定义 若非空集 G 上定义了一个二元运算(下面称之为**群运算**)，该运算满足结合律、有单位元(下面称为群单位元)且使 G 中每个元可逆，则称 G 为一个**群**. 若进而设群运算满足交换律，则称 G 为**交换群**或**Abel 群**. 若群 G 的子集 A 依 G 中的运算构成一个群，则称 A 为 G 的**子群**.

只含一个元的群称为**平凡群**，只含有限个元的群称为有限群，有限群的阶就是其所含元素的个数.

对于一个群 G，通常视情况将其中的群运算称作乘法或加法. 若称群运算为乘法，则称 G 为**乘法群**. 若称群运算为加法，则称 G 为**加群**. 在加群中可定义减法：$x - y = x + (-y)$. 说到加群时，通常总假定它是交换群. 若 G 是平凡的乘法群(或加群)，则通常写作 $G = 1$ (或 $G = 0$).

几乎所有常见的代数系统(如模、向量空间、环与域等)都是群，因此举出群的例子是极容易的.

1.3.4 例 (i) $\mathbf{R}^n$ 依通常的向量加法是一个交换群，其中的 $\mathbf{Q}^n$，$\mathbf{Z}^n$ 等都是其

子群. $\mathbf{Z}^n$ 及其子群在拓扑学中是常出现的.

(ii) $\mathbf{C}\backslash\{0\}$依复数乘法是一个群,其单位元是1. 其中 $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 与 $\mathbf{Q}\backslash\{0\}$ 都是其子群.

(iii) 设 X 是任一非空集, G 是 X 到自身的双射之全体,则 G 以复合作为群运算是一个群,其中的单位元就是单位映射 1_X, $g \in G$ 的逆元就是逆映射 g^{-1}. G 及其子群都称为 X 上的**变换群**. 若 X 含 n 个元素,则称 G 为 n 次**置换群**,并将其记作 S_n.

(iv) 设 G 是 $n\times n$ 阶可逆实矩阵之全体,则 G 依矩阵乘法是一个群,其中的单位元即单位矩阵, $A\in G$ 的逆元即逆矩阵 A^{-1}. 通常以 $\mathrm{GL}(n)$ 记这个群,称之为**一般线性群**.

(v) 设 X 是任给的集,则 2^X 以 Δ(对称差,见1.1节式(2))为群运算是一个交换群,其中的单位元是 $\varnothing$, 而每个 $A\subset X$ 以 A 自身为其逆元,即

$$A\Delta\varnothing = A,\quad A\Delta A = \varnothing. \qquad (A\subset X)$$

为了确定起见,下面的讨论都对乘法群进行,所有结果用于加群时应作的改动是自明的.

1.3.5 定义　设 G 与 H 是两个群. 若映射 $h: G\to H$ 满足条件:

$$h(xy) = h(x)h(y) \quad (x,y\in G), \tag{3}$$

则称 h 为从 G 到 H 的一个**群同态**,或简称为同态. 以 $\mathrm{Hom}(G,H)$ 记从 G 到 H 的群同态之全体. 若 $h\in \mathrm{Hom}(G,H)$ 是单射(或满射),则称 h 为**单同态**(或**满同态**);当 h 是双射时,则称 h 为**群同构**或简称同构,记作 $h: G\cong H$. 当从 G 到 H 的群同构存在时,说 G 与 H 互相同构,写作 $G\cong H$. 若 e 是 H 的单位元,则称 $h^{-1}(e)$ 为 $h\in\mathrm{Hom}(G,H)$ 的**同态核**,记作 $\mathrm{Ker}\, h$.

从定义直接看出, $h\in\mathrm{Hom}(G,H)$ 有以下性质: h 将 G 的单位元映为 H 的单位元; $\forall\, x,y\in G$, 有

$$h(x^{-1}) = [h(x)]^{-1},\quad h(xy^{-1}) = h(x)[h(y)]^{-1}; \tag{4}$$

若 A,B 分别为 G 与 H 的子群,则 $h(A)$ 与 $h^{-1}(B)$ 分别为 H 与 G 的子群;特别地, $\mathrm{Im}\, h(=h(G))$ 与 $\mathrm{Ker}\, h$ 分别为 H 与 G 的子群; h 是单同态 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, h$ 只含单位元.

对于群 G 的任何子集 A,B, 约定

$$AB = \{ab : a\in A, b\in B\},$$

$$A^{-1} = \{a^{-1} : a\in A\},\quad xA = \{xa : a\in A\}.$$

A 是 G 的子群 $\Leftrightarrow$ A 对群运算封闭 $\Leftrightarrow$ $AA^{-1}\subset A$. 若 G 的子群 A 满足条件

$$xA = Ax \quad (\forall\, x\in G), \tag{5}$$

则称 A 为 G 的**正规子群**;称 xA 为 A 的**陪集**. 容易验证,同态核必为正规子群;交换群的任何子群都是正规子群.

构成群的主要方法有两种. 其一是利用已知的群构成积群与商群,这由以下命题描述.

1.3.6 命题 (i) 设 $G_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是一组群, $G = \prod G_i$. 则 G 依群运算

$$(x_i)(y_i) = (x_i y_i) \quad ((x_i),(y_i) \in G) \tag{6}$$

是一个群,其单位元为 $e = (e_i)$, e_i 是 G_i 的单位元; $\forall\, x = (x_i) \in G$, 有

$$(x_i)^{-1} = (x_i^{-1}).$$

设

$$P_i : G \to G_i, \quad (x_1, x_2, \cdots, x_m) \to x_i$$

是投影,则运算(6)由条件"$P_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 均为同态"唯一决定.

(ii) 设 G 是一个群, A 是 G 的正规子群. 在 G 中定义一个二元关系 $\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow xA = yA \quad (\Leftrightarrow xy^{-1} \in A),$$

则 $\sim$ 是一个等价关系. 以 $[x]$ 记 x 所属的 $\sim$ 等价类,以 G/A 记商集 $G/\sim$, 则 G/A 依运算

$$[x][y] = [xy] \qquad (x, y \in G) \tag{7}$$

是一个群,其单位元为 $[e](= A)$; $\forall\, x \in G$, 有

$$[x]^{-1} = [x^{-1}].$$

运算(7)由条件"投影 $P : G \to G/A$ 为同态"唯一决定.

由运算(6)所定义的群 G 称为群 $G_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的**积群**,而群 G/A 称为群 G 模 A 的**商群**.

证 (i) 验证式(6)为群运算是平凡的. 将式(6)改写为

$$P_i(xy) = (P_i x)(P_i y), \quad (x, y \in G, 1 \leqslant i \leqslant n)$$

这表明,式(6)成立 $\Leftrightarrow P_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 均为同态.

(ii) 利用 A 为正规子群易直接验证 $\sim$ 是一等价关系. 若 $x \sim x'$, $y \sim y'$, 则

$$\begin{aligned} xyA &= xy'A = xAy' = x'Ay' \\ &= Ax'y' = x'y'A, \end{aligned}$$

可见 $xy \sim x'y'$. 这表明式(7)中定义的 $[x][y]$ 不依赖于 x, y 的选择. 验证 G/A 依运算(7)是一个群是平凡的. 式(7)可改写成

$$(Px)(Py) = P(xy),$$

这正表明:式(7)成立 $\Leftrightarrow P$ 是一个同态. □

1.3.7 同态定理 设 G, H 是两个群, A 与 B 分别为 G 与 H 的正规子群, $h \in \mathrm{Hom}(G, H)$.

(i) 若 $h(A) \subset B$, 则

$$h_* : G/A \to H/B, \quad [x] \to [h(x)] \tag{8}$$

是一同态,称为 h 的**诱导同态**,它由 $h_* P = Qh$ 唯一决定,其中 $P : G \to G/A$ 与 $Q : H \to H/B$ 是投影.

(ii) 若 h 是满同态,则

$$h_* : G/\mathrm{Ker}\, h \to H, \quad [x] \to h(x) \tag{9}$$

是一同构；h_* 唯一取决于 $h_*P = h, P : G \to G/\mathrm{Ker}\, h$ 是投影.

证　(i) 任给 $x,y \in G$, 有

$$[x] = [y] \Rightarrow xy^{-1} \in A \Rightarrow h(x)[h(y)]^{-1} \in B \quad (\text{用式}(4))$$
$$\Rightarrow [h(x)] = [h(y)],$$

这表明由式(8)所定义的 $h_*[x] = [h(x)]$ 与 x 的选择无关. 定义式 $h_*[x] = [h(x)]$ 可改写成

$$h_*(Px) = Qh(x) \quad (x \in G),$$

这表明映射 h_* 唯一地取决于 $h_*P = Qh$. 由

$$h_*([x][y]) = h_*[xy] = [h(xy)]$$
$$= [h(x)h(y)] = [h(x)][h(y)]$$

看出 h_* 是一同态.

(ii) 取 $A = \mathrm{Ker}\, h, B = \{e\}$ (e 是 H 的单位元),则 $h(A) = B$, 于是由已证的(i)有同态

$$h_* : G/\mathrm{Ker}\, h \to H, \quad [x] \to h(x),$$

此处用到 $H/\{e\} = H, [h(x)] = h(x)$. h 为满射 $\Rightarrow$ h_* 为满射,

$$h_*[x] = e \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\, h \Rightarrow [x] \text{ 是单位元},$$

故 h_* 是单同态,因而为同构. □

同构(9)的意义在于,可用 H 代替 $G/\mathrm{Ker}\, h$ 作为 G 的商群;与 $G/\mathrm{Ker}\, h$ 比较, H 可能形式更简单,因而更便于把握与运用. 下面是一些说明性的例子.

1.3.8 例　(i) 设 $P_i : G \to G_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 依1.3.6(i),则 P_i 是满同态,因此,

$$G_i \cong G/\mathrm{Ker}\, P_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

特别地,取 $n = 2$ 得 $G = G_1 \times G_2$,

$$\mathrm{Ker}\, P_2 = \{(x_1, e_2) : x_1 \in G_1\} = G_1 \times \{e_2\} \cong G_1;$$
$$G_2 \cong G/\mathrm{Ker}\, P_2 \cong G/G_1.$$

或更简单地写作:

$$G_2 = (G_1 \times G_2)/G_1,$$

这就在形式上合乎通常的除法规则: $(ab)/b = a$.

(ii) 将$\mathbf{R}$ 与 $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ 分别看作加群与乘法群. 由指数函数的性质得出,

$$h : \mathbf{R} \to S^1, \quad x \to \mathrm{e}^{2\pi i x}$$

是一个满同态,且 $h(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \mathbf{Z}$, 即 $\mathrm{Ker}\, h = \mathbf{Z}$. 因此有

$$\mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong S^1, \quad x + \mathbf{Z} \to \mathrm{e}^{2\pi i x}.$$

(iii) 给定 $n \in \mathbf{N}$，令 $\omega = \exp(2\pi i/n)$，则 ω 生成一个乘法群 $H = \{\omega^k : k \in \mathbf{Z}\}$. 定义

$$h : \mathbf{Z} \to H, \quad k \to \omega^k,$$

则 h 是一个满同态，

$$\mathrm{Ker}\, h = \{k : \omega^k = 1\} = \{k : k/n \in \mathbf{Z}\} \triangleq n\mathbf{Z}.$$

于是由同态定理有

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \cong H, \quad k + n\mathbf{Z} \to \omega^k.$$

通常将 H 写作 $\mathbf{Z}_n = \{0,1,\cdots,n-1\}$.

构成群的另一种方法是，利用一组给定的元通过群运算构成群. 首先考虑利用已知群中的元构成群. 设 G 是一个群，$\varnothing \neq A \subset G$，

$$\mathscr{B} = \{B : B \text{ 是 } G \text{ 的子群且 } A \subset B\}.$$

显然 $G \in \mathscr{B}$. 令 $B = \bigcap \mathscr{B}$，则易验证 B 是 G 的子群且 $A \subset B$. 显然，B 是 G 中含有 A 的最小子群，称它为 A 生成的子群，记作 $\langle A \rangle$，称 A 为 $\langle A \rangle$ 的**母元组**. 若存在有限集 A，使得 $B = \langle A \rangle$，则称 B 为**有限生成群**. 由一个元生成的群称为**循环群**. 一般地，可以写出：

$$\langle A \rangle = \{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n} : a_i \in A, k_i \in \mathbf{Z} \quad (1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N})\}, \tag{10}$$

其中 a^k 记 k 个 a 的连乘积，而 $a^{-k} = (a^{-1})^k (k > 0)$，$a^0 = e$ (单位元).

表达式(10)又启示我们从任何集(不必是已知群的子集)出发构成群. 任给非空集 A，约定 $\langle A \rangle$ 依式(10)，只是规定如下短缩规则：

(i) $\forall a \in A, a^0 = e$；当 $n \geqslant 2, k_i = 0$ 时可从 $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}$ 中除去 $a_i^{k_i}$.

(ii) $a^k a^l (a \in A, k, l \in \mathbf{Z})$ 可代之以 a^{k+l}.

在约束(i),(ii)之下，$\langle A \rangle$ 依运算

$$(a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n})(b_1^{l_1} \cdots b_m^{l_m}) = a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n} b_1^{l_1} \cdots b_m^{l_m}$$

是一个以 e 为单位元的群，称为由 A 生成的**自由群**. “自由”意指：群中的元素不受除规则(i)、(ii)之外的任何其他关系的约束，而约束(i)和(ii)则是群概念本身所要求的，已不可再除去.

最后，建立非交换群与交换群的联系. 设 G 是一个任给的群. 称 G 中形如 $xyx^{-1}y^{-1} (x, y \in G)$ 的元为**换位子**，以 A 记换位子之全体，以 $[G,G]$ 记 A 生成的子群，称为 G 的**换位子群**.

1.3.9 命题 对任给群 G，以下结论成立：

(i) G 是 Abel 群 $\Leftrightarrow$ $[G,G]$ 是平凡解.

(ii) $[G,G]$ 是 G 的正规子群.

(iii) $G/[G,G]$ 是 Abel 群.

(iv) 若 $h \in \mathrm{Hom}(G,H)$，H 是 Abel 群，则 $[G,G] \subset \mathrm{Ker}\, h$.

证 (i)与(iv)是明显的.

(ii) 只要证 $\forall x \in G$，有 $xAx^{-1} \subset [G,G]$. $\forall a,b \in G$，有

$$xaba^{-1}b^{-1}x^{-1} = (xax^{-1}a^{-1})(axba^{-1}(xb)^{-1}) \in [G,G].$$

(iii) 只要证 $xy[G,G] = yx[G,G] (\forall x,y \in G)$，这相当于

$$xy(yx)^{-1} \in [G,G],$$

而这是当然的. □

群 $G/[G,G]$ 称为 G 的**交换化**. 显然，G 是 Abel 群 $\Leftrightarrow G/[G,G] = G$.

C. Abel 群

有限生成的 Abel 群具有一些很类似于有限维向量空间的性质，因而成为最便于应用的一类群.

以下设 G 是一个 Abel 加群. 任给 $x \in G, k \in \mathbf{Z}$，当 $k > 0$ 时以 kx 记 k 个 x 之和；当 $k < 0$ 时令 $kx = (-k)(-x)$；令 $0x = 0$. kx 称为 x 的**倍元**. 形式上，不妨将 kx 看作 k 与 x 的乘积，这种乘积满足如下公式：

$$\begin{cases} k(x+y) = kx + ky, (k+l)x = kx + lx; & \text{(分配律)} \\ (kl)x = k(lx). & \text{(结合律)} \end{cases}$$

这样，可将 G 看作一种类似于向量空间的代数系统，$\mathbf{Z}$ 的作用类似于向量空间的系数域. 这种类比使得我们可仿照线性代数中的思路来展开 Abel 群的理论. 下面是从线性代数中移植过来的一些概念与术语.

(i) **线性组合**. 任给 $k_i \in \mathbf{Z}$ 与 $x_i \in G (1 \leqslant i \leqslant n)$，称

$$\sum k_i x_i = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n$$

为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个线性组合. 任给 $A \subset G$，由 A 生成的子群 $\langle A \rangle$ (依式(10)) 无非是 A 中元的线性组合之全体，即

$$\langle A \rangle = \{\sum k_i x_i : k_i \in \mathbf{Z}, x_i \in A \quad (1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N})\}. \qquad (10)'$$

(ii) **线性相关**. 设 $x_i \in G (1 \leqslant i \leqslant n)$. 若存在不全为零的 $k_i \in \mathbf{Z} (1 \leqslant i \leqslant n)$，使得 $\sum k_i x_i = 0$，则说 $\{x_i\}$ 线性相关；当 $\{x_i\}$ 不线性相关时说它线性无关. 显然，$\{x_i\}$ 线性相关 $\Leftrightarrow \{x_i\}$ 中某一个元例如 x_n 的某一倍数可表为 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ 的线性组合，即

$$kx_n = \sum_{i=1}^{n-1} k_i x_i \quad (0 \neq k \in \mathbf{Z}).$$

与向量空间不同之处是，上式两边未必能用 k 除！

(iii) **秩与维数**. 若 G 中线性无关组的元的最大个数为 n，则称 n 为 G 的秩，记作 rank G. 若 G 中不存在线性无关组，则约定 rank $G = 0$. 若 G 由 n 个线性无关的元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 生成，则称 G 为 n 维**自由 Abel 群**，称 n 为 G 的维数，记作 dim G；称 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 G 的一组**基**；任给 $x \in G$，x 可唯一地表示成

$$x = \sum k_i a_i,$$

称 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 为 x 关于基 $\{a_i\}$ 的坐标. 若

$$(b_1,b_2,\cdots,b_n) = (a_1,a_2,\cdots,a_n)A,$$

其中 $A \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ 是一个 n 阶整数矩阵，则 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 G 的基 $\Leftrightarrow$ A 可逆且 $A^{-1} \in \mathbf{Z}^{n\times n} \Leftrightarrow \det A = \pm 1$. 显然有

$$\mathbf{Z}^n \cong G, \quad (k_1,k_2,\cdots,k_n) \to \sum k_i a_i,$$

因此可以说，$\mathbf{Z}^n$ 是仅有的 n 维自由 Abel 群. 约定平凡群是零维自由 Abel 群，因此 $\dim G = 0 \Leftrightarrow G = 0$，但当 $\operatorname{rank} G = 0$ 时未必 $G = 0$，例如 $\operatorname{rank} \mathbf{Z}_n = 0(n > 1)$，而 $\mathbf{Z}_n \neq 0$.

(iv) **直和.** 设 $A_i(i \leqslant i \leqslant n)$ 是 G 的子群. 若每个 $x \in G$ 有唯一分解

$$x = \sum a_i, \quad a_i \in A_i(1 \leqslant i \leqslant n),$$

则称 G 为 $A_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的直和，写作

$$G = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n. \tag{11}$$

由直和分解式(11)显然推出 $G \cong \prod A_i$；若 $A_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 均为自由 Abel 群，则 G 亦为自由 Abel 群，且

$$\dim G = \sum \dim A_i.$$

以上讨论表明，自由 Abel 群与向量空间达到最大的类似. 可惜，并非所有有限生成的 Abel 群都是自由 Abel 群. 那么，二者的关系如何？

1.3.10 命题 Abel 群 G 可由 n 个元生成 $\Leftrightarrow$ G 是 $\mathbf{Z}^n$ 的商群.

证 若 $G = \langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$（记号依式(10)′），则显然

$$h: \mathbf{Z}^n \to G, \quad (k_1,k_2,\cdots,k_n) \to \sum k_i a_i$$

是一满同态，因而 $G \cong \mathbf{Z}^n/\operatorname{Ker} h$（用同态定理1.3.7(ii)）. 反之，若 G 是 $\mathbf{Z}^n$ 的商群，$P: \mathbf{Z}^n \to G$ 是投影，任取 $\mathbf{Z}^n$ 的基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，令 $a_i = Pe_i(1 \leqslant i \leqslant n)$，则显然 $G = \langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$. □

鉴于命题1.3.10，如果能描述 $\mathbf{Z}^n$ 的所有商群，那么就可以说彻底阐明了有限 生成Abel 群的结构. 首先解决一个较容易的问题：求出 $\mathbf{Z}$ 的全部商群. 为此，只要求出$\mathbf{Z}$ 的全部子群. 此处要用到一个类似于向量空间的命题：若 A 是 n 维自由 Abel 群 G 的子群，则 A 亦为自由 Abel 群，且 $\dim A \leqslant \dim G$. 现在设 A 是 $\mathbf{Z}$ 的子群，则 A 是自由 Abel 群，当 $\dim A = 0$ 时 $A = 0$；当 $\dim A = 1$ 时，取 A 的基 $\{n\}(n \geqslant 1)$，则 $A = n\mathbf{Z}$. 于是 $\mathbf{Z}$ 的全部商群是(参考例1.3.8(iii))：

$$\mathbf{Z}/\{0\} = \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z}/\mathbf{Z} = \{0\}, \quad \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_n \quad (n \geqslant 2).$$

其中 $\mathbf{Z}_n$ 与 $\mathbf{Z}$ 分别为 n 阶与无限阶循环群. 要构成任一有限生成的 Abel 群，用这些循环群作为材料就够了.

1.3.11 定理 设 G 是有限生成的 Abel 群，则

$$G \cong \mathbf{Z}^r \oplus \mathbf{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{n_\tau}, \tag{12}$$

其中 $r = \operatorname{rank} G, 2 \leqslant n_i \in \mathbf{Z}, n_i | n_{i+1}$, 即 n_i 整除 $n_{i+1}, i = 1,2,\cdots,\tau-1$; 当 $\tau = 0$ 时式(12)中的有限阶循环群不出现; $r, n_1, \cdots, n_\tau$ 由 G 唯一决定.

证明大意　设 G 由 n 个元生成. 由命题1.3.10 有 $\mathbf{Z}^n$ 的子群 H, 使得 $G \cong \mathbf{Z}^n/H$. 可设 $H \neq 0$. 取 H 的一组基 $\{b_i\}$, 设 $b_i = (k_{i1}, k_{i2}, \cdots, k_{in})(1 \leqslant i \leqslant m)$. 于是 $B = [b_{ij}] \in \mathbf{Z}^{m\times n}$, $\operatorname{rank} B = m$. 类似于线性代数中化 λ- 矩阵为标准形的程序,可求得可逆矩阵 $P \in \mathbf{Z}^{m\times m}$ 与 $Q \in \mathbf{Z}^{n\times n}$, 使得 P^{-1} 与 Q^{-1} 均为整数矩阵,且

$$PBQ = [D\ 0] \in \mathbf{Z}^{m\times n}, \tag{13}$$

其中 $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m), 0 < \lambda_i \in \mathbf{Z}, \lambda_i | \lambda_{i+1}, i = 1,2,\cdots,m-1$. 以 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 记 Q^{-1} 的 n 行,则由式(13)有

$$P\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = [D\ 0]Q^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a_1 \\ \lambda_2 a_2 \\ \vdots \\ \lambda_m a_m \end{bmatrix}.$$

这表明 $\{\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \cdots, \lambda_m a_m\}$ 是 H 的基. 于是

$$H \cong \lambda_1\mathbf{Z} \oplus \lambda_2\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \lambda_m\mathbf{Z};$$

$$\frac{G}{H} \cong \frac{\mathbf{Z}^{n-m} \oplus \mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}}{0 \oplus \lambda_1\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \lambda_m\mathbf{Z}} \cong \mathbf{Z}^{n-m} \oplus \mathbf{Z}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{\lambda_m}.$$

令 $r = n - m$, 当 $\lambda_i = 1$ 时删去 $\mathbf{Z}_{\lambda_i}$, 即得到(12).　□

分解式(12)可改写成

$$G \cong \mathbf{Z}^r \oplus T, \quad T = \mathbf{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{n_\tau},$$

其中 T 称为 G 的**挠子群**, $n_1, \cdots, n_\tau$ 称为**挠系数**. 正是挠子群的出现使得 G 异于自由 Abel 群. 若 T 不出现,则 $G \cong \mathbf{Z}^r$ 是 r 维自由 Abel 群.

如同任何非空集可用来生成自由群一样,任何非空集 A 都可用来生成自由 Abel 群 $\langle A\rangle$. 为此仍可利用式(10)′,只是现在 A 是任给的,它不必为某个已知群 G 的子集,而 $\langle A\rangle$ 中的元 $\sum_1^n k_i x_i$ 则看作一个(整系数)形式线性组合,约定 $\sum_1^n k_i x_i = 0 \Leftrightarrow k_i = 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$. $\langle A\rangle$ 依自然的加法运算

$$\sum k_i x_i + \sum l_i x_i = \sum (k_i + l_i) x_i$$

显然是一个自由Abel 群. A 的任何有限子集都是线性无关的;若 A 含 n 个元素,则 $\langle A\rangle$ 是以 A 为基的 n 维自由 Abel 群;若 A 是无限集,则 $\langle A\rangle$ 是无限维自由 Abel 群.

任给 Abel 群 G, 令 $G^* = \operatorname{Hom}(G, \mathbf{Z})$, 则 G^* 依加法

$$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x)\quad(\varphi,\psi\in G^*,x\in G)$$

是一个Abel群，其零元就是零同态，$\varphi\in G^*$ 的负元就是 $-\varphi$. G^* 称为 G 的**对偶群**. 若 G 为 n 维自由Abel群，则 G^* 亦为 n 维自由Abel群.

若 G,H 是Abel群，$h\in\mathrm{Hom}(G,H)$ 则 h 导出一个同态

$$h^*:H^*\to G^*,\varphi\to\varphi\circ h,\tag{14}$$

称为 h 的**对偶同态**. 对偶同态有以下性质：

(i) 若 $g,h\in\mathrm{Hom}(G,H)$，则 $(g+h)^*=g^*+h^*$；

(ii) 若 $f\in\mathrm{Hom}(F,G),g\in\mathrm{Hom}(G,H)$，则 $(gf)^*=f^*g^*$；

(iii) $1_G^*:G^*\to G^*$ 为单位映射.

当写出一个如下序列(两端可无限)

$$\cdots\to G_{i-1}\xrightarrow{h_{i-1}}G_i\xrightarrow{h_i}G_{i+1}\to\cdots\tag{15}$$

时，总假定 $h_i\in\mathrm{Hom}(G_i,G_{i+1})$. 若 h_i 恒满足条件：

$$\mathrm{Im}\,h_{i-1}=\mathrm{Ker}\,h_i,\tag{16}$$

则称式(15)为**正合序列**(或恰当序列). 正合序列包含了很丰富的信息，是用来研究所涉及的群列 $\{G_i\}$ 的有力工具. 容易看出的结论是：设序列(15)为正合序列，若 $G_{i-1}=0$，则 $\mathrm{Ker}\,h_i=0$ (用式(16))，从而 h_i 为单同态；若 $G_{i+1}=0$，则 $\mathrm{Im}\,h_{i-1}=G_i$ (用式(15))，从而 h_{i-1} 为满同态. 这样，从短正合序列

$$0\to G\xrightarrow{h}H\to 0$$

推出 $\varphi:G\cong H$；从正合序列

$$0\to K\xrightarrow{\varphi}G\xrightarrow{\psi}H\to 0$$

推出 φ 与 ψ 分别为单同态与满同态，因而

$$H\cong G/\mathrm{Im}\,\varphi\cong G/K.\quad(\text{用同态定理 1.3.7})$$

以上事实表明，若能判定正合序列式(15)中某些 $G_i=0$，则可得出很强的结论. 在5.2节中，将看到应用以上方法的有趣例子.

第2章 拓扑空间

作为拓扑学的基本对象的拓扑空间，是近代数学中抽象空间概念的一系列拓广的结果.在最一般的意义上，拓扑空间只是少数几条公理支撑起来的逻辑系统.这样一种似乎注定内容贫乏的系统，仍然生长出令人惊奇的丰富的结果.其中给人印象最为深刻的成果是，在拓扑空间这一抽象框架内，形成了关于极限与连续性的最一般的理论，本章正是对这一理论的系统阐释.为使仅仅基于抽象拓扑结构的概念与结果获得一定的直观意义，我们将尽可能考虑一些拓扑空间的特殊例子，其中首选自然是最为人所熟知的Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$，尤其是实直线$\mathbf{R}$；其次是适时地结合考虑比拓扑空间更为直观的度量空间；此外，利用积与商的构成还获得一些拓扑空间的形式多样的例子.本章的材料对于拓扑空间理论的进一步展开是基本的、不可缺少的.而且，在后面各章将起基本作用的一些方法，在本章亦得到适当的发展，对于这些方法的一定程度的理解与掌握，对于进一步的学习是重要而必需的.我们将通过给出主要结论的详细证明及实例阐释，尽可能说明所用方法的主导思想，但对于方法的掌握则有赖于适当选做章末的习题.

2.1 拓扑结构

在你现在看来或许还多少有几分神秘的拓扑空间，其实并不陌生.你所熟知的Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$，就是拓扑空间！不过，$\mathbf{R}^n$ 能成为拓扑空间，并不在于其中具有种种丰富的结构，如直线、平面、距离、角度等，而仅仅在于 $\mathbf{R}^n$ 中能考虑极限与连续性.简单说来，拓扑空间就是其中可考虑极限与连续性的抽象数学结构.为了使这种数学结构具有最大的一般性，必须摈弃所有与极限概念实质上无关的假设，这就使拓扑空间概念仅仅建立在少数几条简单公理的基础上①.因此，从逻辑上说，抽象的拓扑空间不仅不复杂，而且是最简单的数学结构之一.特别地，它远比Euclid 空间简单！这看来是一个好消息.然而不幸的是，对于现代公理化数学来说，结构上的简单性同时也意味着形式上的抽象性与内容的贫乏性.你初次接触到拓扑空间时，很可能会感到它是一个毫无生气的公理化骷髅，看不出其中

① Hausdorff 最早(1914)提出拓扑空间的公理化定义.

有多少有应用价值的结果. 幸而，内涵的相对贫乏可从外延的无比广阔得到补偿. 一旦你发现如此简单的逻辑系统能囊括那样多的不无意义的特殊情况，对于拓扑空间的价值，就不再有任何怀疑了.

现在的问题是，应如何恰到好处地选择一组公理，使之能成为拓扑空间理论的出发点. 要做到这一点，有形式上很不相同的多种方法可用，它们在实质上都是等价的. 下面采用依公理定义开集（或闭集）的方法，这种方法从直观上看来未必最好理解，在历史上也不是引进拓扑的最早的方法，但它在形式上简单则是公认的，因而是大多数拓扑学著作所采用的通行方法.

A. 开集与闭集

你从实分析课程中已经知道，实直线 **R** 上的开集就是开区间的并集. 这种描述开集的方法当然未必能推广到更一般的空间. 另一方面，**R** 上开集有如下性质：任意个开集的并与有限个开集的交仍为开集. 这类性质并不直接涉及 **R** 的特殊结构，因而可以作为抽象地定义开集的出发点.

2.1.1 定义 设 X 是一非空集. 若给定了一集族 $\tau \subset 2^X$，它满足如下**开集公理**：

(O_1) τ 中任一族集之并属于 τ；

(O_2) τ 中任意有限个集之交属于 τ；

(O_3) $X, \varnothing \in \tau$，

则称 X 或 (X, τ) 为**拓扑空间**，称 τ 为 X 上的一个**拓扑**，称 τ 中的集为**开集**（或 τ-开集）；当 $A^c \in \tau$ 时称 A 为**闭集**.

简言之，拓扑就是满足开集公理的开集族，拓扑空间就是定义了开集族的抽象空间. 拓扑空间的任何子集称为**点集**，其中的元称为点. 不要以为点集不是开集就是闭集，除了少数极特殊的拓扑空间之外，从一拓扑空间中随意挑出的点集多半既非开集又非闭集.

依定义，A 是开集 $\Leftrightarrow$ A^c 是闭集. 鉴于这种“互补性”，凡用开集表达的概念与结论，均可等价地用闭集来表达，因而开集与闭集的作用是完全等价的. 例如，开集公理(O_1)～(O_3)可等价地表为如下**闭集公理**：令 $\mathscr{F} = \{A : A^c \in \tau\}$，则

(C_1) $\mathscr{F}$ 中任一族集之交属于 $\mathscr{F}$；

(C_2) $\mathscr{F}$ 中任意有限个集之并属于 $\mathscr{F}$；

(C_3) $X, \varnothing \in \mathscr{F}$.

在 X 上一旦给定了满足公理(C_1)～(C_3)的闭集族 $\mathscr{F}$，则

$$\tau = \{A \subset X : A^c \in \mathscr{F}\}$$

必为 X 上的一个拓扑. 因此，在 X 上给定一个拓扑，与给定一个满足闭集公理的闭集族相当.

就表达形式而言，定义 2.1.1 已如此简单，无需更多解释了. 但仅仅依据定

义,你想象不出开集应当是怎样的集,即定义并未给你关于开集的任何直观印象,这种印象只能来自于实例.

2.1.2 例 (i) 取 $X=\mathbf{R}$, 而 τ 就是通常的开集族,即

$$\tau=\{A: A\text{ 是开区间之并或 } A=\varnothing\},\tag{1}$$

则 $(\mathbf{R},\tau)$ 是一个拓扑空间,这样的 τ 称为$\mathbf{R}$ 上的**通常拓扑**. 今后提到$\mathbf{R}$ 而未加说明时,总假定其中采用通常拓扑. 通常拓扑固然高度特殊,但将它作为解释一般拓扑概念的一个直观样本,是非常有用的.

(ii) 仍取 $X=\mathbf{R}$, 但改令

$$\tau=\{(-\infty,a): -\infty\leqslant a\leqslant\infty\}.\tag{2}$$

显然 $\mathbf{R}=(-\infty,\infty)\in\tau,\varnothing=(-\infty,-\infty)\in\tau$. 若 $A_i=(-\infty,a_i),i\in I$, 令 $a=\sup\limits_i a_i$, 则 $\bigcup A_i=(-\infty,a)\in\tau$. 若 $B_i=(-\infty,b_i)(1\leqslant i\leqslant n)$, 令 $b=\min\limits_i b_i$, 则 $\bigcap B_i=(-\infty,b)\in\tau$. 这就验证了 τ 满足开集公理$(O_1)\sim(O_3)$,因而 τ 是$\mathbf{R}$ 上的一个拓扑,称为**上拓扑**,下面将它记为 τ_u, 以区别于通常拓扑.

(iii) 取 X 为任何非空集,令

$$\tau_w=\{X,\varnothing\},\quad \tau_s=2^X,\tag{3}$$

则 τ_w 与 τ_s 都平凡地满足开集公理,因而都是 X 上的拓扑,分别称为 X 上的**平凡拓扑**与**离散拓扑**;而 (X,τ_w) 与 (X,τ_s) 就分别称为平凡拓扑空间与离散拓扑空间.

从这几个例子已能得出如下几点明确结论.

其一是拓扑空间具有极大的多样性,任何非空集都可以定义为拓扑空间,这就使拓扑空间很不同于像向量空间这样颇受限制的对象. 即使在一个有限集上,亦可依多种方式定义拓扑且导致很多复杂的讨论. 不过,读者应优先考虑那些有自然意义的拓扑,不必太注意那些仅有某种逻辑意义的拓扑孤例.

其二是在同一个集上可以定义多种拓扑. 例如,在$\mathbf{R}$ 上就至少有四种拓扑:通常拓扑、上拓扑、平凡拓扑与离散拓扑,这些拓扑彼此差别甚大. 可见,在说到拓扑空间 X 时,一定要明确其中所用的是哪一个拓扑. 若 τ 与 τ_1 同为 X 上的拓扑且 $\tau\subset\tau_1$, 则说拓扑 τ 弱于或小于 τ_1,τ_1 大于或强于 τ; 若 $\tau\subset\tau_1\neq\tau$, 则说 τ 真弱于 τ_1 或 τ_1 真强于 τ. 例如,$\mathbf{R}$ 上的通常拓扑真强于上拓扑; X 上的平凡拓扑与离散拓扑分别为 X 上的最弱拓扑与最强拓扑(或最小拓扑与最大拓扑).

其三是拓扑空间中的开集形态各异,完全未必如你可能想当然地认为的那样,具有如开区间或开区域一样的直观形象.

应用例 2.1.2 的方法很难举出不那么平凡的拓扑空间的例子. 问题在于,在大多数情况下 τ 是一个庞大的集族,很难用式(1)～(3)这样相对简单的式子表示出来. 可见,我们需要寻求一种方法,使得无需明确写出整个开集族,就能给定

一个拓扑. 为此,要用到拓扑基概念. 注意这里所用的方法在某种程度上可与处理滤子与滤基的方法相对照(参看定义 1.1.10 与命题 1.1.11).

2.1.3 定义　设 (X,τ) 是一拓扑空间,$\mathscr{B}\subset\tau$. 若每个 $A\in\tau$ 是 $\mathscr{B}$ 中某些集之并,则称 $\mathscr{B}$ 为 X 或 τ 的**拓扑基**. 若 $\mathscr{B}^*$ (依 1.1 节式(25))是 X 的拓扑基,则称 $\mathscr{B}$ 为 X 或 τ 的**拓扑子基**. 当不致误解时,就简称拓扑基与拓扑子基为基与子基.

为应用方便,我们给出基与子基概念的如下等价刻画:设 $\mathscr{B}\subset\tau$, 则 $\mathscr{B}$ 是拓扑基 $\Leftrightarrow\forall\ A\in\tau,\forall\ x\in A,\exists\ B\in\mathscr{B}:x\in B\subset A$;$\mathscr{B}$ 是拓扑子基 $\Leftrightarrow\forall\ A\in\tau,\forall\ x\in A,\exists\ \{B_1,B_2,\cdots,B_n\}\subset\mathscr{B}:x\in\bigcap B_i\subset A$.

注意,拓扑基必定也是拓扑子基,但反之则未必. 如果从上下文足以明确所用的拓扑基(或子基)$\mathscr{B}$,就称 $\mathscr{B}$ 中的集为**基开集**(或**子基开集**),而不必明确提到 $\mathscr{B}$. 定义 2.1.3 表明,从基开集(或子基开集)出发,通过任意并(或任意并与有限交)运算,恰好得出所有开集. τ 通常很大,而 $\mathscr{B}$ 可能较小且其中的集可能较简单,这就得到一从较特殊的开集出发通过适当集运算构成所有开集的方法,这正是拓扑基概念的价值之所在. 在这一点上,你不妨将拓扑基与向量空间的基类比:二者都是用特殊的对象通过一定运算表出一般的对象.

“基”概念的功用之一是拓扑命题的条件中出现的开集,通常可代之以基开集,某些情况下甚至可以代之以子基开集,这往往能使条件大为简化. 这一类的例子今后将多次出现. 功用之二是用于定义拓扑,这方面的应用将在例 2.1.6 中用具体例子来解释.

2.1.4 例　(i) 任给拓扑空间 (X,τ),τ 本身显然就是 X 的拓扑基与拓扑子基,这个平凡的基完全没有简化的作用,自然不使我们感兴趣.

(ii) 设 τ 依式(1),而令

$$\mathscr{B}=\{(-\infty,r),(r,\infty):r\in\mathbf{R}\}. \tag{4}$$

容易看出,$\mathscr{B}^*$ 就是 $\mathbf{R}$ 上的开区间之全体,于是由式(1)知 $\mathscr{B}^*$ 与 $\mathscr{B}$ 分别为 τ 的拓扑基与拓扑子基. 正是因为集族 $\mathscr{B}$ 的简单性,使得一些涉及 τ 的问题通过使用 $\mathscr{B}$ 而获得显著简化.

(iii) 设 τ_s 依式(3),而令 $\mathscr{B}=\{\{x\}:x\in X\}$, 即 X 中的单点集之全体,则 $\mathscr{B}$ 显然是 τ_s 的拓扑基.

我们更感兴趣的是如何运用拓扑基(或子基)来给定新的拓扑,这基于以下简单命题,它明显地类似于命题 1.1.11.

2.1.5 命题　给定非空集 X 与 $\mathscr{B}\subset 2^X$. 若 $\mathscr{B}$ 满足条件:

(i) $\mathscr{B}^\#=X$ ($\Leftrightarrow\mathscr{B}$ 覆盖 X),

(ii) $\forall\ A,B\in\mathscr{B},\forall\ x\in A\cap B,\exists\ C\in\mathscr{B}:x\in C\subset A\cap B$,

则 X 上存在唯一拓扑 τ 以 $\mathscr{B}$ 为拓扑基. 若 $\mathscr{B}$ 仅满足条件(i),则 X 上存在唯一拓扑 τ 以 $\mathscr{B}$ 为拓扑子基,τ 是 X 上包含 $\mathscr{B}$ 的最小拓扑(称之为由 $\mathscr{B}$ 生成的拓扑).

显然，命题中条件(ii)可代以更强的条件：

(ii)′ $A,B \in \mathscr{B} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{B}$.

证 首先设$\mathscr{B}$满足条件(i)和(ii)，令

$$\tau = \{A: 存在\ \mathscr{A} \subset \mathscr{B}\ 使\ A = \mathscr{A}^{\#}\}.$$

直接看出τ满足开集公理(O_1)、(O_3)(此处用到当$\mathscr{A} = \varnothing$时$\mathscr{A}^{\#} = \varnothing$，参看1.1D). 其次，$\forall A,B \in \mathscr{B}$，由条件(ii)推出$A \cap B \in \tau$. 若$A,C \in \tau$，则有$\mathscr{A}$，$\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$，使得$A = \mathscr{A}^{\#}, C = \mathscr{C}^{\#}$，于是

$$\begin{aligned} A \cap C &= \mathscr{A}^{\#} \cap \mathscr{C}^{\#} \\ &= \bigcup \{A_1 \cap C_1 : A_1 \in \mathscr{A}, C_1 \in \mathscr{C}\} \in \tau, \quad (用(O_1)) \end{aligned}$$

这就验证了公理(O_2). 因此τ是X上的一个拓扑，它显然以$\mathscr{B}$为其拓扑基.

其次设$\mathscr{B}$仅满足条件(i)，则$\mathscr{B}^*$显然同时满足条件(i)和(ii)，因而是X上某个拓扑τ的拓扑基，$\mathscr{B}$则是τ的拓扑子基. 若τ_1是X上包含$\mathscr{B}$的一个拓扑，则对$\mathscr{B}$中的集作任意并与有限交运算必不越出τ_1之外，这表明$\tau \subset \tau_1$. 因此，τ是X上包含$\mathscr{B}$的最小拓扑，这同时也说明了τ由$\mathscr{B}$唯一决定. □

为了生成X上的某个拓扑τ，通常可借助不同的拓扑基. 若拓扑基$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$生成同一拓扑，则说$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$是等价的.

以下是解释命题2.1.5之应用的一个稍复杂的例子.

2.1.6 例 设X是实数列之全体，将每个$x \in X$表为$x = (x_i)$. 令

$$\begin{cases} \mathscr{B} = \{B_{i\delta} : i \in \mathbf{N}, \delta \subset \mathbf{R}\ 为开区间\}, \\ B_{i\delta} = \{x \in X : x_i \in \delta\}. \end{cases} \tag{5}$$

任给$x \in X$，令$\delta = (x_1 - 1, x_1 + 1)$，则显然有$x \in B_{1\delta}$. 这表明$\mathscr{B}^{\#} = X$，因此以$\mathscr{B}$为拓扑子基在$X$上生成一个拓扑$\tau$.

通过应用命题2.1.5，上面毫不费力就得出以$\mathscr{B}$为拓扑子基的拓扑τ存在，这表明利用子基导入拓扑是何等简捷. 但同时也遗留一个不容忽视的问题：如何解释如此定义的开集族的构成？我们知道，每个$A \in \tau$是某些基开集之并(依定义2.1.3)，现在让我们考察一下基开集(即$\mathscr{B}^*$中的集)的结构. 任给$B \in \mathscr{B}^*$，必有有限个集$B_{i_k\delta_k} \in \mathscr{B}(1 \leqslant k \leqslant n)$，使得$B = \bigcap B_{i_k\delta_k}$，其中$i_k \in \mathbf{N}, \delta_k \subset \mathbf{R}$为开区间. 因此依式(5)有

$$B = \{x \in X : x_{i_k} \in \delta_k (1 \leqslant k \leqslant n)\}.$$

任何$A \in \tau$都是如上形式的集的并. 开集族τ之庞大，由此可想而知，但借助于较简单的拓扑子基(5)，原则上已能完全确定τ. 运用拓扑基或子基的好处，由此可见一斑. 后面将看到许多更具说服力的例子.

B. 邻域与极限

本节开头提到，引进拓扑的初衷是给极限概念一个最一般的描述. 但在拓扑

空间中如何做到这一点，似乎尚未见端绪. 问题在于极限概念依赖于“动点”对“定点”的“无限接近”，而开集概念并未直接提供一个描述这种“无限接近”的方法. 下面通过引进邻域来做到这一点. 在分析课程中，你已熟悉使用邻域了.

以下设 (X,τ) 是给定的拓扑空间.

2.1.7 定义 任给 $x \in X$，令

$$\mathcal{N}_x = \{V \subset X : x \in A \subset V (\exists\, A \in \tau)\}. \tag{6}$$

称 $\mathcal{N}_x$ 为 x 的**邻域系**，称每个 $V \in \mathcal{N}_x$ 为 x 的**邻域**. 若开集(或闭集) V 是 x 的邻域，则称 V 为 x 的**开邻域**(**或闭邻域**).

设 $\mathcal{N}_x$ 依式(6)，显然 $\varnothing \overline{\in} \mathcal{N}_x$. 若 $V_i \in \mathcal{N}_x (i = 1,2)$，则有 $A_i \in \tau$，使得 $x \in A_i \subset V_i (i = 1,2)$，因而

$$x \in A_1 \cap A_2 \subset V_1 \cap V_2, \quad A_1 \cap A_2 \in \tau.$$

这表明 $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_x$. 若 $V \in \mathcal{N}_x, V \subset W \subset X$，则显然 $W \in \mathcal{N}_x$. 这就验明了 $\mathcal{N}_x$ 满足定义1.1.10中的条件(F_1)~(F_3)，因而 $\mathcal{N}_x$ 是一滤子，称为 x 的**邻域滤子**；$\mathcal{N}_x$ 的滤基(或子滤基)就称为 x 的**邻域基**(**或邻域子基**). 若 $\mathscr{B}$ 是 x 的一个邻域基(或邻域子基)，在不必直接提到 $\mathscr{B}$ 时，就称 $\mathscr{B}$ 中的集为 x **的基邻域**(**或子基邻域**).

注意，邻域系、邻域基、邻域子基与拓扑、拓扑基、拓扑子基有一种自然的对应关系，可以说，前者正是后者的局部化. 正因为如此，邻域基(或邻域子基)也称为**局部基**(**或局部子基**). 对于处理拓扑空间中的局部问题(例如极限与连续性问题)，应用邻域比直接应用拓扑更方便. 而凡需邻域系发挥的作用，均可由邻域基(甚至邻域子基)替代，就如用拓扑基(或子基)替代拓扑一样. 实际上，可建立邻域基与拓扑基的如下直接联系：设 $\mathscr{B} \subset \tau$，则 $\mathscr{B}$ 是 X 的拓扑基(或子基)的充要条件是：$\forall\, x \in X$，

$$\mathscr{B}_x = \{B \in \mathscr{B} : x \in B\}$$

是 x 的一个邻域基(或邻域子基)，你将在习题中(题15)证此结论. 特别地，取 $\mathscr{B} = \tau$ 得出，$\forall\, x \in X$，x 的开邻域的全体构成 x 的一个邻域基. 因此，凡用邻域描述的问题，都可仅用开邻域来描述，以致一些作者干脆限定邻域应为开邻域，但这种限制弊多利少，应予舍弃.

现在来考察一下如何判定或求得邻域基. 给定 $x \in X$ 与集族 $\mathscr{B}$，依邻域基的定义与定义1.1.10，$\mathscr{B}$ 是 x 的邻域基 $\Leftrightarrow \mathscr{B} \subset \mathcal{N}_x$ 且 $\mathscr{B} \vdash \mathcal{N}_x$，即每个 $B \in \mathscr{B}$ 是 x 的邻域(这意味着 B 包含 x 的一个开邻域)，且 $\mathscr{B}$ 中含有 x 的任意小的邻域(这意味着 $\forall\, A \in \mathcal{N}_x, \exists\, B \in \mathscr{B} : B \subset A$). 其次，$\mathscr{B}$ 是 x 的邻域子基 $\Leftrightarrow \mathscr{B}^*$ 是 x 的邻域基 $\Leftrightarrow \mathscr{B} \subset \mathcal{N}_x$，且每个 $A \in \mathcal{N}_x$ 包含 $\mathscr{B}$ 中有限个集的交. 基于以上条件可以判定，对于 $x \in \mathbf{R}$，以下诸集族均是 x 的邻域基：

$$\mathscr{A} = \{(a,b) : x \in (a,b), a,b \in \mathbf{R}\};$$

$$\mathscr{B} = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : 0 < \varepsilon \in \mathbf{R}\};$$
$$\mathscr{C} = \{(x-n^{-1}, x+n^{-1}) : n \in \mathbf{N}\};$$
$$\mathscr{D} = \{[a,b] : x \in (a,b), a,b \in \mathbf{R}\}.$$

最后这个例子提请你注意：邻域不必是开集. 集族

$$\mathscr{E} = \{(a,\infty), (-\infty,b) : x \in (a,b), a,b \in \mathbf{R}\}$$

则是 x 的邻域子基，因显然有 $\mathscr{E}^* = \mathscr{A}$.

为了说明邻域概念对于决定拓扑结构的作用，我们举出与命题 2.1.5 相对应的以下结果，其证明循命题 2.1.5 之证的思路并无困难，因而予以省略(在题 16 中要求你证此).

2.1.8 定理　给定非空集 X 与集族 $\mathscr{B}_x \subset 2^X (x \in X)$. 若以下条件满足：

(i) $\forall x \in X$, 有 $x \in \bigcap \mathscr{B}_x$,

(ii) $\forall x \in X, \forall A, B \in \mathscr{B}_x$, 有 $\mathscr{B}_x \vdash A \cap B$,

(iii) $\forall x \in X, \forall A \in \mathscr{B}_x, \exists B \in \mathscr{B}_x, \forall y \in B$, 有 $\mathscr{B}_y \vdash A$,

则 X 上存在唯一拓扑，使得依此拓扑，每个 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域基.

由此可见，以邻域或邻域基作为出发点同样可以导出拓扑. 这一思想最先是由 Hausdorff 于 1914 年提出的.

现在转向极限. 序列极限是很简单的：设 $\{x_n\} \subset X$ 是一序列，$x \in X$，则依据分析中的经验，自然应规定：

$$x_n \to x \Leftrightarrow \forall A \in \mathscr{N}_x, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, \text{有 } x_n \in A. \tag{7}$$

这的确是一个适当的极限定义. 但问题在于，无论是研究拓扑结构之需要，还是为达到某些应用目的，序列极限都是不够的. 我们早已期待的一般极限理论，自然不应止于序列极限. 拓广的方法是，用所谓网极限来代替序列极限. 下面就来定义网概念.

2.1.9 定义　(i) 任给有向集 $(T, \leqslant)$ 与映射 $x : T \to X$，称 x 为 X 中的一个**网**或**有向列**，记作 $\{x_t : t \in T\}$ 或就简写作 $\{x_t\}$，其中 $x_t = x(t)$. 若 $\{t_\delta : \delta \in \Delta\}$ 是 T 中的网，它满足条件：

$$\forall t_0 \in T, \exists \delta_0 \in \Delta, \forall \delta \geqslant \delta_0, \text{有 } t_\delta \geqslant t_0, \tag{8}$$

则称 $\{x_{t_\delta}\}$ 为网 $\{x_t\}$ 的一个**子网**.

(ii) 设 $\{x_t\}$ 是 X 中的一个网. 若存在 $x \in X$，使得 $\forall A \in \mathscr{N}_x, \exists t_0, \forall t \geqslant t_0$，有 $x_t \in A$，则称 $\{x_t\}$ 为一个**收敛网**，并说 $\{x_t\}$ 收敛于 x，记作 $x_t \to x$. 写成与式(7)对照的形式就是：

$$x_t \to x \Leftrightarrow \forall A \in \mathscr{N}_x, \exists t_0, \forall t \geqslant t_0, \text{有 } x_t \in A. \tag{7$'$}$$

由式(7)$'$所描述的收敛最早由 Moore-Smith(1922)所考虑，因而称为 **Moore-Smith 收敛**. 这种收敛实际上涵盖了现代数学中已知的各种收敛性，应当说是一件极可庆幸的事.

借用分析中常用的一种说法，可将式(7)′表述成：$x_t \to x \Leftrightarrow x_t$ 最终进入 x 的每个邻域. 从方法的角度考虑，对式(7)′还可作一极有价值的改进，即将 $\mathscr{N}_x$ 代以某个邻域子基，这意味着将式(7)′修改为

$$x_t \to x \Leftrightarrow \forall B \in \mathscr{B}, \exists t_0, \forall t \geqslant t_0, 有 x_t \in B, \tag{9}$$

其中$\mathscr{B}$ 是 x 的某个(随便哪一个)邻域子基. 式(9)意味着，$x_t \to x \Leftrightarrow x_t$ 最终进入 x 的每个子基邻域. 事实上，设式(9)中记号"$\Leftrightarrow$"右端的条件满足 $A \in \mathscr{N}_x$，取 $B_i \in \mathscr{B}(1 \leqslant i \leqslant n)$，使 $\bigcap B_i \subset A$；取 t_i，使得 $\forall t \geqslant t_i$，有 $x_t \in B_i(1 \leqslant i \leqslant n)$；依有向集的性质可取 $t_0 \geqslant t_i(1 \leqslant i \leqslant n)$，则 $\forall t \geqslant t_0$，有 $x_t \in \bigcap B_i \subset A$，这表明 $x_t \to x$. 验证式(9)中的条件通常要比验证式(7)′中的条件简单得多，这就提供了显示邻域子基好处的第一个例子.

网收敛固然类似于序列收敛，但毕竟要复杂一些，需要用较多的实例来说明.

2.1.10 例 (i) **N** 依通常的序$\leqslant$显然是一有向集，故任何序列 $\{x_n\}$ 都是网，且式(7)是式(7)′的特殊情况.

(ii) Riemann 积分. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的实函数. 以 $P = \{x_i, \xi_i\}$ 记 $[a,b]$ 上的如下点组

$$a = x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant \xi_n \leqslant x_n = b,$$

约定 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}(1 \leqslant i \leqslant n)$，$|P| = \max \Delta x_i$. 以$\mathscr{P}$ 记形如 P 的点组之全体. 定义 $P \leqslant P' \Leftrightarrow |P| \geqslant |P'|(P, P' \in \mathscr{P})$，则易见 $(\mathscr{P}, \leqslant)$ 是一有向集. 任给 $P = \{x_i, \xi_i\} \in \mathscr{P}$，令

$$S_P = \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i,$$

则 $\{S_P : P \in \mathscr{P}\}$ 是 **R** 中的一个网. 于是依条件式(9)有

$$\begin{aligned} S_P \to I &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists P_0, \forall P \geqslant P_0, 有 S_P \in (I - \varepsilon, I + \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists P_0, 当 |P| \leqslant |P_0| 时 |S_P - I| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow I = \lim_{|P| \to 0} S_P = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

最后这个极限的意义与分析中定义积分的极限一致. 这样，数学分析课程中最显复杂的一种极限，现在不过是一种特殊的网极限而已.

(iii) 设在 **R** 中采用拓扑 τ_u (依 2.1.2(ii))，$x_t = 1/t, t \in T = (0, \infty)$，$T$ 依通常的序$\leqslant$为有向集，因而 $\{x_t\}$ 是**R** 中的网. 取定 $x \geqslant 0$，由式(2)看出 x 有如下邻域基：

$$\mathscr{B} = \{(-\infty, x + \varepsilon) : 0 < \varepsilon \in \mathbf{R}\}.$$

因 $\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 \in (0, \infty), \forall t \geqslant t_0$，有 $x_t = 1/t < x + \varepsilon$，故依式(9)有 $x_t \to x$. 这个例子的特殊之处在于：网 $\{x_t\}$ 收敛于每个非负实数！

(iv) 设 X 依例 2.1.6，$\{x^t\}\subset X$ 是一个网，$x\in X$，今用式(9)表出 $x^t\to x$ 的条件. 由式(5)知 x 有如下邻域子基：

$$\begin{cases}\mathscr{B}_x=\{B_{i\varepsilon}: i\in\mathbf{N},0<\varepsilon\in\mathbf{R}\},\\ B_{i\varepsilon}=\{y\in X: |y_i-x_i|<\varepsilon\}.\end{cases}$$

于是由式(9)有

$$\begin{aligned}x^t\to x&\Leftrightarrow\forall\, i\in\mathbf{N},\forall\,\varepsilon>0,\exists\, t_0,\forall\, t\geqslant t_0,\text{有 } x^t\in B_{i\varepsilon}\\ &\Leftrightarrow\forall\, i\in\mathbf{N},\forall\,\varepsilon>0,\exists\, t_0,\forall\, t\geqslant t_0,\text{有 } |x_i^t-x_i|<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow\forall\, i\in\mathbf{N},\text{有 } x_i^t\to x_i.\end{aligned}$$

由此可见，X 中的网收敛归结为依坐标收敛. 这个结论说明，在例 2.1.6 中意义不甚明了的拓扑定义，现在看来是自然而有价值的.

(v) 设 X 是任一拓扑空间，$\mathscr{B}$ 是 $x\in X$ 的一个邻域基，则 $\mathscr{B}$ 以 $\supset$ 为序是有向集(参看 1.2.2(iii)). $\forall\, B\in\mathscr{B}$，取 $x_B\in B$，则 $\{x_B: B\in\mathscr{B}\}$ 是一个网. $\forall\, A\in\mathscr{B}$，就取 $B_0=A$，则当 $B\in\mathscr{B}, B\subset B_0$ 时，恒有 $x_B\in B\subset A$. 由式(9)，这正表明 $x_B\to x$. 特别地，$\forall\, B\in\mathscr{N}_x$，取 $x_B\in B$，则有 $x_B\to x$. 这个例子初看起来颇令人惊异，其实是很自然的：$\mathscr{B}$ 包含了 x 的"任意小"邻域，随着 $B\in\mathscr{B}$"任意小"，x_B 亦任意"接近于" x. 这一结果本书后面将多次用到. 而且，今后将某个邻域基看作有向集时，总认定其中以 $\supset$ 为序；可以说 $\supset$ 是邻域基的一种自然序.

(vi) 设 X,Y 是两个拓扑空间，$F: X\backslash\{x_0\}\to Y, x_0\in X, \{x_0\}$ 不是开集(这相当于 x_0 不是 X 中的孤立点，参看定义 2.1.11)，$y_0\in Y$. 受分析中描述函数极限的"ε-δ"语言的启发，规定

$$\begin{cases}\text{当 } x\to x_0 \text{ 时 } Fx\to y_0\Leftrightarrow\\ \forall\, V\in\mathscr{N}_{y_0},\exists\, U\in\mathscr{N}_{x_0}: F(U\backslash\{x_0\})\subset V.\end{cases}$$

现在说明以上极限实际上是网的极限. 令

$$T=\{(U,x): U\in\mathscr{N}_{x_0}, x\in U\backslash\{x_0\}\},$$

任给 $t\in(U,x)\in T$，定义 $y_t=Fx$；规定

$$(U,x)\leqslant(W,z)\Leftrightarrow U\supset W;$$

则 $(T,\leqslant)$ 是一有向集，从而 $\{y_t: t\in T\}$ 是 Y 中的网. 设当 $x\to x_0$ 时 $Fx\to y_0$，$V\in\mathscr{N}_{y_0}$，则有 $U\in\mathscr{N}_{x_0}$，使 $F(U\backslash\{x_0\})\subset V$. 取定 $x\in U\backslash\{x_0\}$(这样的 x 必存在，否则 $U=\{x_0\}$，与 $\{x_0\}$ 非开集相矛盾)，令 $t=(U,x)$. $\forall\, s=(W,z)\in T$，当 $s\geqslant t$ 时有

$$y_s=Fz\in F(W\backslash\{x_0\})\subset F(U\backslash\{x_0\})\subset V,$$

这表明 $y_t\to y_0$. 反之，设 $y_t\to y_0, V\in\mathscr{N}_{y_0}$，则有 $t=(U,x)\in T$，使得 $\forall\, s\geqslant t$，有 $y_s\in V$. $\forall\, z\in U\backslash\{x_0\}$，令 $s=(U,z)$，则 $s\in T, s\geqslant t$，因而 $y_s=Fz\in V$，故得 $F(U\backslash\{x_0\})\subset V$. 这表明当 $x\to x_0$ 时 $Fx\to y_0$. 这就证实了

$$\text{“当 } x \to x_0 \text{ 时 } Fx \to y_0\text{”} \Leftrightarrow y_t \to y_0.$$

这样，无论序列极限与函数极限，都统一于网的极限.

以上结论无疑是有趣的，但今后并不用到它. 一般来说，在拓扑空间理论中，如上形式的函数极限并不特别方便，在涉及它时均可用网的极限来代替.

从例2.1.10已初步看出，拓扑空间中的极限概念概括了多种多样的特殊情况，这应使你深感满意. 但就建立极限的一般理论而言，目前却难有作为. 虽然不难证明，若 $x_t \to x$，则 $\{x_t\}$ 的任何子网亦收敛于 x，但除此之外，已难以得出更多的结论了. 如你已看到的，我们甚至不能确立极限的唯一性(见例2.1.10(iii))，更不必说推广分析学中有关极限的其他丰富结论. 例如，能说到"收敛序列有界"吗？这种状况或许会令人失望. 其实，这应是意料中的事，更多的结论必然依赖于对空间的更多假定，随着新的假定的不断加入，目前尚显贫乏的极限论是会逐步丰富起来的.

C. 内部与闭包

给定拓扑空间 X，X 中的任何点集 A 都不妨看作空间 X 中的一个图形. 这就促使我们将平常图形的内部、边界等直观概念推广于拓扑空间中的抽象图形. 在实分析中，你已熟悉了 $\mathbf{R}$ 上一集的内部、闭包等概念. 一个稍细的分析可以发现，这些概念其实可仅用邻域来描述，而不必直接联系于 $\mathbf{R}$ 的特殊结构. 因此，它们都可推广到一般拓扑空间上，这正是本段所要做的.

2.1.11 定义 设 (X,τ) 是一拓扑空间，$A \subset X$. 令

$$\begin{cases} A^\circ = \{x \in X : \exists V \in \mathscr{N}_x, \text{使 } V \subset A\}, & (10) \\ \overline{A} = \{x \in X : \forall V \in \mathscr{N}_x, \text{有 } A \cap V \neq \varnothing\}, & (11) \\ \partial A = \{x \in X : \forall V \in \mathscr{N}_x, \text{有 } A \cap V \neq \varnothing \neq A^c \cap V\}, & (12) \\ A' = \{x \in X : \forall V \in \mathscr{N}_x, \text{有} (A \backslash \{x\}) \cap V \neq \varnothing\}. & (13) \end{cases}$$

以上四个集依次称为集 A 的**内部**、**闭包**、**边界**与**导集**，四个集中的点分别称为 A 的**内点**、**触点**、**边界点**与**聚点**. 聚点也称为**极限点**. $A \backslash A'$ 中的点称为 A 的**孤立点**.

容易验证，出现于定义式(10)～(13)中的邻域系 $\mathscr{N}_x$ 可代以 x 的任一邻域基(但一般不可代以邻域子基). 这一点对于 A°，$\overline{A}$ 等的运用是重要的.

对于内部、闭包等概念，可从如下两方面考察与把握.

其一是注意到定义赋予概念的直观意义. 例如，式(10)无非是说，$x \in A^\circ \Leftrightarrow$ x 连同其邻近的点均属于 A；而式(11)则可解释为：$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x$ 的任一邻域含有 A 中的点 $\Leftrightarrow A$ 中有任意邻近 x 的点. 如果与我们从平常空间中获得的直觉经验联系起来，对于 A°，$\overline{A}$ 等将获得更鲜明的直观印象，这种印象对于这些概念的运用无疑是有益的. 但你亦不应走得太远，须知拓扑空间毕竟不是Euclid空间，不能随意将来自常识的结论加于内部与闭包等概念，以免陷于谬误. 例如，若

在 $\mathbf{R}$ 中使用离散拓扑，取 $A=[0,1]$，则 A 是开集，因而0，1均是 A 的内点！

其二是注意所定义概念间的逻辑联系及表达这种联系的运算公式，这对于概念的运用或许是更重要的. 从逻辑上说，对应 $A\to A^\circ$ 无非是一种运算或算子，即所谓**内部算子**. 类似地，可考虑**闭包算子** $A\to\overline{A}$ 与**边界算子** $A\to\partial A$ 等. 这种观点有些形式化，不那么富于直观，但它有一个明显的好处，即对于运算 $A\to A^\circ$，$A\to\overline{A}$ 等(及它们与集运算的结合)，可建立若干方便的演算规则(或称运算公式)，充分利用这些规则，就可将某些拓扑论证归结为一系列形式演算. 这种方法在拓扑学中具有基本意义. 它成功到什么程度，在本书中将有足够多的机会去体会. 就目前而言，首要的问题是熟悉如下几个最基本的公式：

$$\overline{A}=A^{c\circ c},\quad A^\circ=(\overline{A^c})^c;\tag{14}$$

$$\overline{A}=A\cup\partial A=A^\circ\cup\partial A=A\cup A';\tag{15}$$

$$A^\circ=A\backslash\partial A=\overline{A}\backslash\partial A;\tag{16}$$

$$\partial A=\overline{A}\backslash A^\circ=\overline{A}\cap\overline{A^c};\tag{17}$$

$$A'=\{x\in X:x\in\overline{A\backslash\{x\}}\}.\tag{18}$$

初次面对这许多公式，且其中有些公式的直观意义未必很明显，你可能颇感惶惑. 其实无需过分耽心，多次运用之后自会熟练自如. 关键的公式是式(14)，它表达了闭包与内部的某种对偶性或互相转化关系. 所有公式的证明都是容易的，建议你至少做出部分证明. 例如，等式 $\overline{A}=A^{c\circ c}$ 的证明如下：

$$\begin{aligned} x\in\overline{A}&\Leftrightarrow\forall V\in\mathscr{N}_x,\text{有 }V\cap A\neq\varnothing &&\text{(用式(11))}\\ &\Leftrightarrow\forall V\in\mathscr{N}_x,\text{有 }V\not\subset A^c\\ &\Leftrightarrow x\,\overline{\in}\,A^{c\circ}\Leftrightarrow x\in A^{c\circ c}. &&\text{(用式(10))}\end{aligned}$$

公式(14)～(18)表明，内部、闭包、边界与导集四者中任何一个都足以表出其他三个，因而他们对于刻画拓扑的作用是等价的. 不过，就方便与常用而言，闭包似乎是最重要的[1]，下面就来着重考察它.

2.1.12 定理　(i) 设 (X,τ) 是一拓扑空间，$A,B\subset X$，则成立：

$$\overline{\varnothing}=\varnothing,\quad A\subset\overline{A}=\overline{\overline{A}},\quad\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B};\tag{19}$$

$$\overline{A}=\{x:\text{ 存在网}\{x_t\}\subset A\text{ 使 }x_t\to x\};\tag{20}$$

$$=\bigcap\{B:A\subset B\subset X\text{ 且 }B\text{ 为闭集}\};\tag{21}$$

$$A\text{ 是闭集}\Leftrightarrow A=\overline{A}.$$

(ii) 设 X 是一非空集，其中定义了算子 $A\to\overline{A}(A\subset X)$，使得条件(19)满足，则 X 上存在唯一拓扑 τ，依此拓扑，$\overline{A}$ 恰为 A 的闭包.

定理2.1.12表明，在 X 上给定一拓扑，与在 X 上给定一个满足条件(19)的

---

[1] 与闭包联系最为密切的聚点与导集概念，在分析中颇为常用，因而为拓扑空间理论的开拓者所看重，但实际上并不如闭包方便. 本书中对闭包、内部多有应用，而导集的使用则降至最低限度.

闭包算子相当,式(19)称为Kuratowski **闭包公理**. 这就表明,对刻画拓扑结构而言,开集与闭包的作用是等价的.

证 (i) 依闭包的定义式(11)直接看出 $\overline{\varnothing}=\varnothing, A\subset\overline{A}\subset\overline{\overline{A}}$. 若 $x\in\overline{\overline{A}}$, 则对 x 的任给开邻域 V, 有 $y\in V\cap\overline{A}$; 因 V 也是 y 的开邻域,这又推出 $V\cap A\neq\varnothing$, 因而由式(11)有 $x\in\overline{A}$. 这就证得 $\overline{A}=\overline{\overline{A}}$. 易见 $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$. 若 $x\in(\overline{A}\cup\overline{B})^c$, 则有 $U,V\in\mathscr{N}_x$, 使得 $U\cap A=\varnothing=V\cap B$. 因 $W\triangleq U\cap V\in\mathscr{N}_x$, 而 $W\cap(A\cup B)=\varnothing$, 故 $x\,\overline{\in}\,\overline{A\cup B}$. 这就证得 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, 于是式(19)得证.

若有网 $\{x_t\}\subset A$ 使 $x_t\to x$, 则结合式(7)′与式(11)易见 $x\in\overline{A}$. 反之,若 $x\in\overline{A}$, 则 $\forall V\in\mathscr{N}_x$, 有 $x_V\in V\cap A$, $\{x_V\}$ 是 A 中的网且 $x_V\to x$ (参看例2.1.10(v)). 这证得式(20).

若 A 是闭集,则 A^c 是开集,因而 $\forall x\in A^c$, 有 $A^c\in\mathscr{N}_x$, 而 $A^c\cap A=\varnothing$, 故 $x\,\overline{\in}\,\overline{A}$. 这表明 $A^c\subset(\overline{A})^c$, 从而 $A=\overline{A}$. 反之,若 $A=\overline{A}$, 则 $A^c=(\overline{A})^c=A^{c\circ}$ (用式(14)),故 $\forall x\in A^c$, A^c 含 x 的一个开邻域(用式(10)),这表明 A^c 可表为开集之并,因而 A^c 是开集,故 A 为闭集. 这证得 A 是闭集 $\Leftrightarrow A=\overline{A}$.

以 C 记式(21)之右端. 由 $A\subset\overline{A}=\overline{\overline{A}}$ (依式(19))推出 $\overline{A}$ 是包含 A 的闭集,故 $\overline{A}\supset C$. 另一方面,若 $A\subset B\subset X$, B 是闭集,则 $\overline{A}\subset\overline{B}=B$. 这推出 $\overline{A}\subset C$, 因此 $\overline{A}=C$, 式(21)得证.

(ii) 令 $\mathscr{F}=\{A\subset X: A=\overline{A}\}$. 利用条件(19)容易验证 $\mathscr{F}$ 满足闭集公理 $(C_1)\sim(C_3)$ (参看2.1A),因而 $\tau=\mathscr{F}'$ (依1.1节式(25))是 X 上的拓扑, $\mathscr{F}$ 恰为 X 中的闭集族. 暂且以 A^* 记 A 关于拓扑 τ 的闭包,今证 $A^*=\overline{A}$. 因 A^* 为闭集,故 $A^*\in\mathscr{F}$, 从而 $A^*=\overline{A^*}$, 于是 $\overline{A}\subset\overline{A^*}=A^*$. 另一方面,由 $\overline{A}=\overline{\overline{A}}$ 推出 $\overline{A}\in\mathscr{F}$, 从而 $\overline{A}=(\overline{A})^*$, 于是 $A^*\subset(\overline{A})^*=\overline{A}$, 如所要证. □

定理2.1.12包含了丰富的结论,特别值得强调的是以下两点.

其一是式(20)给出了闭包的一个新的等价刻画,它在形式上很不同于式(11)与式(15),在应用上常常是更方便的. 式(20)表明, $\overline{A}$ 是集 A 经由极限运算扩张的结果,这一事实凸显出极限运算对于刻画拓扑结构的决定性作用. 由闭包的表达式(20)又引出如下结论: A 为闭集 $\Leftrightarrow$ A 中收敛网的极限均属于 A; 或更简单些, A 为闭集 $\Leftrightarrow$ A 对极限运算封闭. 这一结论无论对于闭集的理解与实际运用,都具有基本意义. 唯一可能使你疑虑的是,对于 $x\in\overline{A}$, 如何去找到收敛于 x 的网 $\{x_t\}\subset A$? 实际上,在理论证明中很少发生这样的问题.

其二是定理2.1.12直接导出关于内部的一个平行结果. 由于内部与闭包之间的形式优美的对偶关系(见式(14)),对于这一平行结果的表述与证明都是明显的,留给读者作为练习(题27). 此处只是指出与闭包公理(19)对应的如下**内部公理**:

$$X^\circ = X,\quad A \supset A^\circ = A^{\circ\circ},\quad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ; \tag{19'}$$

以及与闭包公式(21)对偶的内部公式：

$$A^\circ = \bigcup \{B : B \subset A \text{ 且 } B \text{ 为开集}\}. \tag{21'}$$

式(19)′中最后一式的证明如下：

$$\begin{aligned}
(A \cap B)^\circ &= (\overline{(A \cap B)^c})^c && (\text{用式}(14)) \\
&= (\overline{(A^c \cup B^c)})^c && (\text{用 1.1 节式}(3)) \\
&= (\overline{A^c} \cup \overline{B^c})^c && (\text{用式}(19)) \\
&= (\overline{A^c})^c \cap (\overline{B^c})^c && (\text{用 1.1 节式}(3)) \\
&= A^\circ \cap B^\circ. && (\text{用式}(14))
\end{aligned}$$

从以上论证必定会获得一个印象：拓扑命题的证明原来也可以通过演算来完成！今后将看到更多的类似论证.

注意，公式(21)无非是说，$\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集；而公式(21)′则表示，A° 是含于 A 的最大开集. 当开集族与闭集族较简单时，利用以上事实求 $\overline{A}$ 与 A° 是方便的(参看下面的例 2.1.13).

2.1.13 例 (i) 对于 $\mathbf{R}$ 的子集 A 求出 $A^\circ, \overline{A}$ 等. 设

$$A = (-1,0) \cup \{1/n : n \in \mathbf{N}\},$$

则

$$\overline{A} = [-1,0] \cup \{1/n : n \in \mathbf{N}\},$$
$$\partial A = \{-1,0\} \cup \{1/n : n \in \mathbf{N}\},$$
$$A^\circ = (-1,0),\quad A' = [-1,0].$$

(ii) 设在 $\mathbf{R}$ 中采用上拓扑 τ_u (依 2.1.2(ii))，则 $\mathbf{R}$ 中的闭集族是

$$\mathscr{F} = \{\mathbf{R}, \varnothing\} \cup \{[a,\infty) : a \in \mathbf{R}\}.\quad (\text{用式}(2))$$

取 $A = (-\infty, 0]$，可直接看出 $A^\circ = (-\infty, 0)$. 因包含 A 的唯一闭集是 $\mathbf{R}$，故 $\overline{A} = \mathbf{R}$(用式(21)). 同理可得 $A' = \mathbf{R}$. 由此又得出

$$\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ = [a,\infty).\quad (\text{用式}(17))$$

从习惯于使用通常拓扑的眼光看来，以上结果足以令人惊异，似乎是病态的. 但既然容许不同的拓扑存在，就没有理由排除这些似乎有悖常识的结论.

(iii) 设 τ_w 与 τ_s 依式(3)，$A \subset X$. 依拓扑 τ_w，X 中仅有的开集(或闭集)就是 $X, \varnothing$，因此依拓扑 τ_w 有 $A^\circ = \varnothing$，除非 $A = X$；$\overline{A} = X$，除非 $A = \varnothing$ (用式(21)与式(21)′). 另一方面，依拓扑 τ_s，X 的每个子集是既开又闭的集，因此依拓扑 τ_s 有 $A^\circ = A = \overline{A}$. 这个例子充分说明了对于同一个集 $A \subset X$，因 X 中选用拓扑之不同，A 的内部(或闭包)可能差别甚大.

(iv) 设 X 是任一非空集，令

$$\tau = \{\varnothing\} \cup \{A \subset X : A^c \text{ 为有限集}\}.$$

今验证 τ 是 X 上的一个拓扑. 为此，显然只要验证集族

$$\mathscr{F} = \{X\} \cup \{A \subset X : A \text{ 为有限集}\}$$

满足闭集公理(C_1)～(C_3)，而这是显然的.如上的 τ 称为 X 上的**有限补拓扑**，它是一个较小的拓扑，因而具有一些特殊的性质，常用作解释某些拓扑结论的例子.现在可立即指出的一个特殊性质是：若 X 是无限集，则对任何无限子集 $A \subset X$，都有 $\overline{A} = X$. 这可由 X 是唯一的闭无限集这一事实推出(用式(21)).

(v) 设 X 是任一非空集，令

$$\tau = \{\varnothing\} \cup \{A \subset X : A^c \text{ 为可数集}\},$$

则类似于(iv)，易验证 τ 是 X 上的一个拓扑，称为**可数补拓扑**.依此拓扑，X 中的闭集就是可数集及 X 本身.若 X 是不可数集，则 X 是唯一的不可数的闭集，故对任何不可数集 $A \subset X$，必有 $\overline{A} = X$.

若 X 是有限集(或可数集)，则 X 上的有限补拓扑(或可数补拓扑)显然是离散拓扑.因此，说到有限补(或可数补)拓扑空间 X 时，通常认定 X 含无限(或不可数)多个点.

设 A 是可数补拓扑空间 X 的不可数真子集，则 $\overline{A} = X$. 由式(20)，X 中每点是 A 中某个网的极限，但未必是 A 中某个序列的极限.事实上，任给序列 $\{x_n\} \subset A$ 与 $x \in A^c$，因 $V = X \backslash \{x_n\}$ 是 x 的开邻域，而 $x_n \overline{\in} V (\forall 4n \in \mathbf{N})$，故必定 $x_n \not\to x$！

最后这个例子表明，在刻画闭包的式(20)中，一般不可将网换成序列.而这又表明，对于拓扑结构的刻画，仅用序列极限是不够的，这正是引进网的主要原因.尽管与序列相比网的运用确有诸多不便之处，但我们却无法避开它.只有对某些特殊的拓扑空间，式(20)中的网才可代之以序列.下面考虑的度量空间就是如此.

D. 度量空间

度量空间虽可看作特殊的拓扑空间，但其中存在除拓扑之外的其他结构，因而有关度量空间的理论自成体系，只能在独立的章节中进行完整讨论(参看本书第4章).不过，度量空间因其特有的直观性，非常适于用作解释拓扑概念的例子，让它尽早登场，对于拓扑空间理论的展开，应可收到特别的效果.

回忆一下描述序列极限的条件(7)，它无非是说，

$$x_n \to x \Leftrightarrow \text{当 } n \text{ 充分大时 } x_n \text{ 进入 } x \text{ 的任一邻域}.$$

这里，用“进入 x 的任一邻域”刻画了对 x 的“任意接近”，确不失为一种有效的抽象方法.但用邻域刻画的任意接近，既无数量上的准确性(如何估计误差?)，又缺少直观性，毕竟不能令人满意.如果所说的是实数列的收敛，条件(7)就可修改成更直观的如下表述：

$$x_n \to x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, \text{有 } |x_n - x| < \varepsilon, \tag{22}$$

其中 $|x_n - x|$ 正是点 x_n 与 x 之间的距离.用距离来描述两点之间的接近程度，

大概不再有比这更好的方法了. 而问题在于,如何将运用距离的方法推广到最一般的场合? 按照公理化数学的思路,这有赖于距离概念的公理化,它由如下的简单定义给出.

2.1.14 定义 设 X 是一非空集. 若对任何 $x,y \in X$,规定了一个非负实数 $d(x,y)$ 作为 x 与 y 之间的距离,使之满足如下**距离公理**:

(D_1) 对称性: $d(x,y) = d(y,x)$,

(D_2) 三角不等式: $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$,

(D_3) 正定性: $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$(以上 $x,y,z \in X$),

则称 d 为 X 上的一个**度量**或距离,称 (X,d) (或就说 X)为一个**度量空间**(或距离空间).

接近于定义 2.1.14 的定义是由法国数学家 Fréchet 于 1906 年首先给出的. 注意,距离公理(D_1)~(D_3)恰好概括了常识中所认知的距离的基本性质. 对于距离的许多应用来说,重要的正是这几条基本性质,而距离的具体计算公式则未必总是需要的.

今后提到度量空间而未作说明时,总认定其中的度量记为 d. 以下设 X 是给定的度量空间. 一旦有了比较直观而便于联想的度量,就可以将平常空间中基于距离的各种概念与事实移植于度量空间. 例如, $\forall\, x \in X, r > 0$, 令

$$\begin{cases} B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}, \\ \overline{B}_r(x) = \{y \in X : d(x,y) \leqslant r\}, \end{cases} \tag{23}$$

二者分别称为 X 中以 x 为心以 r 为半径的**开球**与**闭球**;开球就简称为**球**. 设 $A, B \subset X, x \in X$, 约定

$$\begin{cases} d(A,B) = \inf\limits_{a \in A, b \in B} d(a,b), \\ d(x,B) = \inf\limits_{b \in B} d(x,b); \end{cases} \tag{24}$$

$$\operatorname{diam} A = \sup_{a,b \in A} d(a,b). \tag{25}$$

称 $d(A,B)$ 为集 A 与 B 之间的距离,称 $d(x,B)$ 为点 x 与集 B 之间的距离,称 $\operatorname{diam} A$ 为集 A 的**直径**. 若 $\operatorname{diam} A < \infty$, 则称 A 为**有界集**. 显然, A 有界 $\Leftrightarrow$ A 含于某个球 $B_r(x)$.

就我们的主要目标来说,最重要的事情是利用度量来定义拓扑. 不难预计到球是构成拓扑的基本成员. 令

$$\mathscr{B} = \{B_r(x) : x \in X, r > 0\}.$$

显然 $\mathscr{B}^{\#} = X$. 若 $x,y \in X, r,s > 0, z \in B_r(x) \cap B_s(y)$, 则

$$\delta \triangleq \min\{r - d(x,z), s - d(y,z)\} > 0.$$

$\forall\, p \in B_\delta(z)$, 有

$$d(x,p) \leqslant d(x,z) + d(z,p) \quad (\text{用}(D_2))$$

$$< d(x,z) + \delta \leqslant r,$$

可见 $p \in B_r(x)$. 同理 $p \in B_s(y)$，因此 $p \in B_r(x) \cap B_s(y)$. 这表明

$$B_\delta(z) \subset B_r(x) \cap B_s(y).$$

这就验证了$\mathscr{B}$满足命题2.1.5中的条件(i)和(ii)，于是以$\mathscr{B}$为拓扑基在 X 上生成唯一拓扑 τ，称它为由度量 d 生成的拓扑，或简称为**度量拓扑**. 今后当将度量空间看作拓扑空间时，总认定其中采用度量拓扑，除非另有说明.

鉴于在第4章中将要系统地考察一些常用的度量空间，此处仅列举几个最简单的例子.

2.1.15 例 (i) 在 $\mathbf{R}^n$ 中，通常采用所谓**Euclid 度量**：

$$\begin{cases} d(x,y) = |x - y|, \\ |x| = \left(\sum\limits_i |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (x = (x_i) \in \mathbf{R}^n). \end{cases} \tag{26}$$

如上定义的 d 满足公理(D_1)与(D_3)是明显的，而(D_2)则由Cauchy不等式

$$\left(\sum_i x_i y_i \right)^2 \leqslant \sum_i x_i^2 \sum_i y_i^2 \quad (x_i, y_i \in \mathbf{R}, 1 \leqslant i \leqslant n)$$

推出. $\mathbf{R}^n$ 中由度量(26)生成的拓扑称为**通常拓扑**或**Euclid 拓扑**；当 $n = 1$ 时，此处所定义的通常拓扑与例2.1.2(i)一致.

(ii) 设 X 是任给非空集，定义

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases} \tag{27}$$

则 d 平凡地满足距离公理，这样的 d 称为 X 上的**离散度量**. 注意 (X,d) 中的球是很特别的：$\forall\, x \in X$，有

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\}, & 0 < r \leqslant 1; \\ X, & r > 1. \end{cases}$$

由此看出，X 上的度量拓扑就是离散拓扑(参看例2.1.4(iii)). 不过，应注意一个离散拓扑可以由异于式(27)的度量生成.

(iii) 设 (X,d) 是任给度量空间，令

$$d'(x,y) = d(x,y) \wedge 1 \quad (x,y \in X), \tag{28}$$

此处(及今后)约定 $\alpha \wedge \beta = \min\{\alpha,\beta\}$ $(\alpha,\beta \in \mathbf{R})$，容易验证 d' 亦是 X 上的度量. d' 可能很不同于 d (例如总有 $d'(x,y) \leqslant 1$, $d(x,y)$ 则未必如此)，但二者仍然生成同一拓扑. 要证实这一点，只要说明相对于度量 d 的球 $B_r(x)$ 与相对于度量 d' 的球

$$B'_r(x) = \{y \in X : d'(x,y) < r\}$$

分别为空间 (X,d') 与 (X,d) 中的开集. 而为此，又只要注意，当 $0 < r < 1$ 时恒有 $B_r(x) = B'_r(x)$.

最后这个例子表明，同一拓扑可能由很不相同的度量生成. 因此，对于与度

量拓扑 τ 有关的种种概念(如开集、闭集、极限、连续性等等),生成 τ 的某个特定度量并无本质意义.在历史上,正是这一认识促使人们从度量空间过渡到更一般的拓扑空间.

再回到关于度量拓扑的一般讨论.以下设 X 是给定的度量空间.基本的问题是:如何利用度量 d 来描述 X 中的拓扑概念?度量拓扑有哪些特殊之处?下面就邻域、收敛性、闭包等逐一考察.如果能始终联系 $\mathbf{R}^n$ 这个样本进行观察与思考,下面的讨论将是极其明白与自然的.

(i) 邻域.任给 $x \in X$,以下两个球族

$$\mathscr{B} = \{B_r(x) : 0 < r \in \mathbf{R}\}, \tag{29}$$

$$\mathscr{B}_1 = \{B_{1/n}(x) : n \in \mathbf{N}\} \tag{30}$$

都是 x 的邻域基.事实上,任给 x 的开邻域 V,由度量拓扑的构成,必有 X 中的球 $B_\rho(y): x \in B_\rho(y) \subset V$.取 $r \in \mathbf{R}$,使得 $0 < r < \rho - d(x,y)$,则 $\forall z \in B_r(x)$,有

$$\begin{aligned} d(y,z) &\leqslant d(y,x) + d(x,z) \\ &< d(y,x) + r < \rho, \end{aligned}$$

可见 $B_r(x) \subset B_\rho(y) \subset V$.这表明 $\mathscr{B}$ 是 x 的邻域基;同理可验证 $\mathscr{B}_1$ 亦是 x 的邻域基.通常称 $B_r(x)$ 为 x 的球形邻域或 r- 邻域.像式(29)与式(30)这样特别简单的球形邻域基存在,正是度量拓扑的特殊优势.

(ii) 极限.设 $\{x_t\}$ 是 X 中的网,$x \in X$.采用式(29)中的 $\mathscr{B}$ 并用式(9)得到

$$\begin{aligned} x_t \to x &\Leftrightarrow \forall r > 0, \exists t_0, \forall t \geqslant t_0, \text{有 } x_t \in B_r(x) \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0, \exists t_0, \forall t \geqslant t_0, \text{有 } d(x_t, x) < r, \end{aligned}$$

这就表明

$$x_t \to x \Leftrightarrow d(x_t, x) \to 0. \tag{31}$$

据此,度量空间中的收敛也称为**度量收敛**.

(iii) 闭包.设 $A \subset X$,今建立特别有价值的以下公式:

$$\overline{A} = \{x : \text{存在序列} \{x_n\} \subset A \text{ 使 } x_n \to x\} \tag{32}$$

$$= \{x \in X : d(x,A) = 0\}. \tag{33}$$

任给 $x \in \overline{A}$,因 x 有表如式(30)的邻域基,故 $\forall n \in \mathbf{N}$,有 $x_n \in B_{1/n}(x) \cap A$,于是 $\{x_n\} \subset A$ 且 $x_n \to x$ (用例 2.1.10(v)).这表明等式(32)成立.由 $\{x_n\} \subset A$,$x_n \to x$ 推出

$$d(x,A) \leqslant d(x,x_n) \to 0, \quad (\text{用式(24)、式(31)})$$

故 $d(x,A) = 0$.反之,若 $d(x,A) = 0$,则由式(24)知,$\forall n \in \mathbf{N}$,必有 $x_n \in A$,使 $d(x,x_n) < 1/n$.这就得到 $\{x_n\} \subset A, x_n \to x$,因而由式(32)有 $x \in \overline{A}$.这表明式(33)成立.

2.2 映 射

设 (X,τ_X) 与 (Y,τ_Y) 是给定的拓扑空间，分别以 $\mathscr{F}_X$ 与 $\mathscr{F}_Y$ 记 X 与 Y 中的闭集族；对于任何 $x\in X, y\in Y$，分别以 $\mathscr{N}_x$ 与 $\mathscr{N}_y$ 记点 x 与 y 的邻域系. 若 $F: X\to Y, \mathscr{A}\subset 2^X, \mathscr{B}\subset 2^Y$，则约定

$$\begin{cases} F\mathscr{A}=\{FA: A\in\mathscr{A}\}, \\ F^{-1}\mathscr{B}=\{F^{-1}B: B\in\mathscr{B}\}, \end{cases} \tag{1}$$

因而 $F\mathscr{A}\subset 2^Y, F^{-1}\mathscr{B}\subset 2^X$. 对于记号的以上约定在今后一直保持有效.

对于一个映射 $F: X\to Y$，我们关心的是它是否保持 X 中的某些拓扑事实？关注的重点是：是否能从 $x_t\to x$ 推出 $Fx_t\to Fx$？F 是否将开集映为开集？F 是否将闭集映成闭集？这些问题引出三个概念：连续映射、开映射与闭映射，下面分别予以讨论，重点自然是连续映射.

A. 连续映射

你从数学分析课程知道，一个函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在点 $x\in\mathbf{R}$ 连续意味着

$$\begin{cases} \forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\forall\,y\in\mathbf{R}, \\ \text{当 } |x-y|<\delta \text{ 时 } |f(x)-f(y)|<\varepsilon. \end{cases} \tag{2}$$

以 $d(x,y)$ 取代 $|x-y|$，条件式(1)直接过渡到度量空间之间的映射的连续性条件：若 X,Y 是度量空间，$F: X\to Y$ 是一映射，$x\in X$，则 F 在 x 连续可定义为

$$\begin{cases} \forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\forall\,y\in X, \\ \text{当 } d(x,y)<\delta \text{ 时 } d(Fx,Fy)<\varepsilon. \end{cases} \tag{3}$$

利用球记号(见 2.1 节式(23))，可将条件(3)改写为

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0: FB_\delta(x)\subset B_\varepsilon(Fx)\,^{①}. \tag{4}$$

如果进而以邻域取代式(4)中的球，就得到拓扑空间之间的映射连续的定义.

2.2.1 定义 设 X 与 Y 是拓扑空间，$F: X\to Y, x\in X$. 若

$$F\mathscr{N}_x\vdash\mathscr{N}_{Fx}, \text{即 } \forall\,V\in\mathscr{N}_{Fx},\exists\,U\in\mathscr{N}_x: FU\subset V \tag{5}$$

(参照式(1)与 1.1 节式(26)，2.1 节式(6))，则说 F 在点 x 连续. 若 F 在 X 上每点连续，则称 F 为从 X 到 Y 的**连续映射**.

为了表达简便，今后使用如下记号，它们在现代数学文献中(不限于拓扑学)是通行的：$C(X,Y)$ 表示从 X 到 Y 的连续映射之全体，而令 $C(X)=C(X,\mathbf{R})$. 通常以 f,g 等记 $C(X)$ 中的元，并称之为**连续函数**.

---

① 此处 $B_\delta(x)$ 与 $B_\varepsilon(Fx)$ 分别记 X 与 Y 中的球. 只要依上下文不致混淆，今后在不同度量空间中都采用同样的球记号.

你从分析课程中所熟悉的连续函数，当然都是定义 2.2.1 意义下的连续函数. 在一般拓扑空间 X 中，容易依定义 2.2.1 验证常值映射(即满足 $Fx \equiv y_0$ 的映射，$y_0 \in Y$ 固定)、单位映射 1_X 是连续映射. 再举出 X 上的连续映射的进一步的例子则已不容易.

如同在数学分析中一样，连续函数的和、差、积、商(分母不取零值)是连续函数(习题49)，连续映射的复合映射是连续映射. 这些结论是近于平凡的，其证明可直接仿照分析中的证法作出，此处无需详述.

对于连续性的刻画，倒还值得作某些进一步的探讨. 首先考虑在一点的连续性，条件(5)可表为一系列形式上稍异的等价条件，我们将其写成如下命题.

2.2.2 命题　设 $F: X \to Y, x \in X$，则以下条件互相等价：

(i) F 在 x 连续；

(ii) $F^{-1}\mathscr{N}_{Fx} \subset \mathscr{N}_x$，即 Fx 的邻域的原像是 x 的邻域；

(iii) 对 x 的某个(或任何)邻域基 $\mathscr{A}$，Fx 的某个(或任何)邻域子基 $\mathscr{B}$，有

$$F\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}, \text{即} \ \forall B \in \mathscr{B}, \exists A \in \mathscr{A}: FA \subset B. \tag{6}$$

(iv) 若在 X 中 $x_t \to x$，则在 Y 中 $Fx_t \to Fx$.

对于条件(iii)中的“某个”与“任何”作这样理解：当(iii)用作 F 在 x 连续的充分条件时取“某个”，而用作必要条件时则取“任何”. 今后遇到类似情况时都作此理解.

证　(i)⇒(ii). 这由以下推理得出(参考定义 1.1.10)：

$$F\mathscr{N}_x \vdash \mathscr{N}_{Fx} \Rightarrow \mathscr{N}_x \vdash F^{-1}\mathscr{N}_{Fx} \Rightarrow F^{-1}\mathscr{N}_{Fx} \subset \mathscr{N}_x.$$

(ii)⇒(iii). 类似于上面的推理，有

$$F^{-1}\mathscr{N}_{Fx} \subset \mathscr{N}_x \Rightarrow F^{-1}\mathscr{B} \subset \mathscr{N}_x \Rightarrow \mathscr{A} \vdash \mathscr{N}_x \vdash F^{-1}\mathscr{B} \Rightarrow F\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}.$$

(iii)⇒(iv). 设 $\mathscr{A}$ 是 x 的某个邻域基，$\mathscr{B}$ 是 Fx 的某个邻域子基，$F\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$，在 X 中 $x_t \to x$. 任给 $B \in \mathscr{B}$，取 $A \in \mathscr{A}$，使 $FA \subset B$. 取 t_0，使得 $\forall t \geqslant t_0$，有 $x_t \in A$，从而 $Fx_t \in B$. 这正表明 $Fx_t \to Fx$ (用 2.1 节式(9)).

(iv)⇒(i). 若 F 在 x 不连续，则条件式(5)不成立，即有 $V \in \mathscr{N}_{Fx}$，使得 $\forall U \in \mathscr{N}_x$，有 $FU \not\subset V$，即有 $x_U \in U, Fx_U \overline{\in} V$. 这就得出 X 中的网 $\{x_U\}, x_U \to x$ (用例 2.1.10(v))，而 $Fx_U \not\to Fx$. 这表明(iv)⇒(i). □

依定义2.2.1，连续性无疑是一个**局部概念**. 验证 $F: X \to Y$ 在 x 连续时，只需考虑 F 在 x 的邻近(即某个邻域内)的性质就够了，完全不必顾及 F 在它处的行为. 即使在 x 的某邻域外随意改变 F，也不会影响 F 在 x 的连续性.

尽管如此，但若说及 F 在 X 上连续，就可给出某些整体性的或“无点化”的刻画，以下结果是基本的.

2.2.3 定理　对于映射 $F: X \to Y$，以下条件互相等价：

(i) $F \in C(X,Y)$；

(ii) $F^{-1}\tau_Y \subset \tau_X (\Leftrightarrow F^{-1}\mathscr{F}_Y \subset \mathscr{F}_X)$;

(iii) 对 Y 的某个(或任何)拓扑子基 $\mathscr{B}$,有 $F^{-1}\mathscr{B} \subset \tau_X$;

(iv) $\forall B \subset Y$, 有 $F^{-1}B^\circ \subset (F^{-1}B)^\circ$;

(v) $\forall B \subset Y$, 有 $F^{-1}\overline{B} \supset \overline{F^{-1}B}$;

(vi) $\forall A \subset X$, 有 $F\overline{A} \subset \overline{FA}$.

证 (i)⇒(ii). 设 F 连续, $B \in \mathscr{F}_Y$, $\{x_t\} \subset F^{-1}B$ 是一个网, $x_t \to x \in X$, 则 $Fx_t \to Fx \in B$ (用定理2.2.2 及 B 为闭集),从而 $x \in F^{-1}B$, 可见 $F^{-1}B$ 为闭集. 这表明 $F^{-1}\mathscr{F}_Y \subset F^{-1}\mathscr{F}_X$. 由开集与闭集的互补性质及1.1 节式(15)得出 $F^{-1}\tau_Y \subset \tau_X \Leftrightarrow F^{-1}\mathscr{F}_Y \subset \mathscr{F}_X$.

(ii)⇒(iii)是平凡的.

(iii)⇒(iv). 设 $\mathscr{B}$ 依条件(iii), $B \subset Y$, $x \in F^{-1}B^\circ$, 今要证 $x \in (F^{-1}B)^\circ$. 因 $Fx \in B^\circ$, 故 B 是 Fx 的邻域,于是有有限个 $B_i \in \mathscr{B}$, 使得 $Fx \in \bigcap B_i \subset B$, 从而

$$x \in F^{-1}(\bigcap B_i) = \bigcap (F^{-1}B_i) \subset F^{-1}B.$$

因 $F^{-1}B_i \in \tau_X$, 故 $\bigcap (F^{-1}B_i) \in \tau_X$, $x \in (F^{-1}B)^\circ$, 如所要证.

(iv)⇒(v)由 2.1 节式(14)与 1.1 节式(15)得出(你不妨写出细节).

(v)⇒(vi). 任给 $A \subset X$, 由条件(v)推出:

$$F\overline{A} \subset F\,\overline{F^{-1}FA} \subset FF^{-1}\,\overline{FA} \subset \overline{FA}. \quad (\text{用 1.1 节式(13)})$$

(vi)⇒(i). 设条件(vi)满足 $x \in X$, 今证 F 在 x 连续,即 $F\mathscr{N}_x \vdash \mathscr{N}_{Fx}$. 任取 $V \in \mathscr{N}_{Fx}$, 令 $U = F^{-1}V$, 则 $FU \subset V$, 只要证 $U \in \mathscr{N}_x$, 即 $x \in U^\circ$. 这由以下推理得出:

$$\begin{aligned} x \in F^{-1}V^\circ &= (F^{-1}\,\overline{V^c})^c && (\text{用 1.1 节式(15)}, 2.1 \text{ 节式(14)}) \\ &\subset (F^{-1}\,\overline{FF^{-1}V^c})^c = (F^{-1}\,\overline{FU^c})^c && (\text{用 1.1 节式(13)}) \\ &\subset (F^{-1}F\,\overline{U^c})^c \subset (\overline{U^c})^c = U^\circ. && (\text{用条件(vi)}) \end{aligned}$$

□

定理 2.2.3 中最常用的连续性条件无疑是(ii)(或(iii)),它可简单地表为"开集(或子基开集)的原像是开集". 这种形式的条件的优势无疑与集映射 $B \to F^{-1}B$ 的良好性质有关(参考1.1 节式(15)).

读过命题 2.2.2 与定理 2.2.3 的证明,你会感到其中充满了对于集的演算(包括集运算与取内部、闭包的运算),这与你在分析课程中所习惯的"ε-δ 论证"相比,可以说是大异其趣. 集论方法的充分运用,无疑是拓扑学的基本特色之一,这是你在学习时不可不细加体会的.

将定理2.2.3(iii)用到拓扑空间上的实函数,得到特别方便的如下连续性条件.

2.2.4 推论 设 $f: X \to \mathbf{R}$. 为使 $f \in C(X)$, 以下每个条件均是必要且充分的:

(i) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, 集 $\{f < \alpha\}$ 与集 $\{f > \alpha\}$ 均为开集;

(ii) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, 集 $\{f \leqslant \alpha\}$ 与 集$\{f \geqslant \alpha\}$ 均为闭集;

(iii) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$,集$\{f < \alpha\}$ 与 集$\{f \leqslant \alpha\}$ 分别为开集与闭集;

(iv) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$,集$\{f > \alpha\}$ 与 集$\{f \geqslant \alpha\}$ 分别为开集与闭集.

此处及今后均使用流行的如下记号:

$$\{f < \alpha\} = \{x \in X : f(x) < \alpha\}. \tag{7}$$

参照式(7),记号 $\{f > \alpha\}$,$\{f \leqslant \alpha\}$,$\{f \geqslant \alpha\}$ 及 $\{f = \alpha\}$ 等的意义是自明的.

证 容易看出(i)~(iv)互相等价,故只要证(i). 注意

$$\{f < \alpha\} = f^{-1}(-\infty,\alpha), \{f > \alpha\} = f^{-1}(\alpha,\infty),$$

而 $\{(-\infty,\alpha),(\alpha,\infty) : \alpha \in \mathbf{R}\}$ 是$\mathbf{R}$ 的拓扑子基(依例2.1.4(ii)),于是直接从定理2.2.3(iii)推出: $f \in C(X) \Leftrightarrow$ 条件(i)成立. □

定理2.2.2~2.2.4 所提供的丰富结论可作多方面的应用. 首先,它们为判定连续性提供了较多的途径,这就使我们有可能获得较多的连续映射的例子. 其次,这些结果提供了用连续映射构成开集与闭集的普遍方法. 下面用一些例子来作解释.

2.2.5 例 (i) 设 X 上给定了两个拓扑 τ,τ_1, 比较二者的大小是重要的. 由定理2.2.3(ii), $\tau \supset \tau_1$ 等价于单位映射

$$1_X : (X,\tau) \to (X,\tau_1) \tag{8}$$

连续. 基于此,应用命题2.2.2 与定理2.2.3 又得出 $\tau \supset \tau_1$ 的如下等价条件:

(a) $\forall x \in X$,x 依 τ_1 的邻域都是 x 依 τ 的邻域(用定理2.2.2(ii)).

(b) 若在 X 中依 τ 有 $x_t \to x$, 则依 τ_1 亦有 $x_t \to x$ (用定理2.2.2(iv)). 这意味着较强的拓扑有较强的收敛性.

(c) τ_1 的某个子基含于 τ (用定理2.2.3(iii)).

(d) $\forall A \subset X$,A 依 τ 的内部包含 A 依 τ_1 的内部(用定理2.2.3(iv)). 这意味着较大的拓扑有较大的内部.

(e) $\forall A \subset X$,A 依 τ 的闭包含于 A 依 τ_1 的闭包(用定理2.2.3(vi)). 这意味着较大的拓扑有较小的闭包.

在需要比较两个拓扑的强弱时,以上结论是重要的.

(ii) 设 $A \subset X$,$f = \chi_A$, 则

$$\{f < r\} = \begin{cases} \varnothing, & r \leqslant 0, \\ A^c, & 0 < r \leqslant 1, \\ X, & r > 1; \end{cases}$$

$$\{f > r\} = \begin{cases} \varnothing, & r \geqslant 1, \\ A, & 0 \leqslant r < 1, \\ X, & r < 0. \end{cases}$$

于是由推论2.2.4 推出: $f \in C(X) \Leftrightarrow A$ 与 A^c 均为开集 $\Leftrightarrow A$ 是既开又闭之集.

(iii) 对任何 $f,g: X \to \mathbf{R}$，定义

$$\begin{aligned}(f \vee g)(x) &= \max\{f(x),g(x)\},\\ (f \wedge g)(x) &= \min\{f(x),g(x)\}.\end{aligned} \tag{9}$$

运算

$$(f,g) \to f \vee g \text{ 与 } (f,g) \to f \wedge g$$

统称为**格运算**. 我们指出，$C(X)$ 对格运算是封闭的，即若 $f,g \in C(X)$，则必有 $f \vee g \in C(X), f \wedge g \in C(X)$. 由推论2.2.4，为证 $f \vee g \in C(X)$，只要指出 $\forall r \in \mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}\{f \vee g < r\} &= \{f < r\} \cap \{g < r\},\\ \{f \vee g > r\} &= \{f > r\} \cup \{g > r\}.\end{aligned}$$

(iv) 设 X 为度量空间，$A \subset X, f(x) = d(x,A)$（依2.1节式(24)）. 任给 $x, y \in X, a \in A$，有

$$d(x,a) \leqslant d(x,y) + d(y,a).$$

以上不等式两边对 $a \in A$ 取下确界得

$$f(x) \leqslant d(x,y) + f(y), \text{即 } f(x) - f(y) \leqslant d(x,y).$$

同理有 $f(y) - f(x) \leqslant d(x,y)$. 因而

$$|d(x,A) - d(y,A)| = |f(x) - f(y)| \leqslant d(x,y). \tag{10}$$

由以上不等式立得 $f \in C(X)$. 在度量空间理论中，这样的 f 是一个简单而有用的工具. 任给 $r > 0$，直接由推论2.2.4得出集 $\{f < r\}$ 与 $\{f \leqslant r\}$，即

$$\{x \in X : d(x,A) < r\} \text{ 与 } \{x \in X : d(x,A) \leqslant r\}$$

分别为开集与闭集. 特别，取 $A = \{a\}(a \in X)$ 得出：球 $B_r(a)$ 与 $\overline{B}_r(a)$ 分别为开集与闭集.

B. 开映射与闭映射

我们在定理2.2.3中看到，在连续映射下，开集的原像是开集（定理2.2.3(ii)）. 这一性质不应与“映开集为开集”相混淆，后者是另一类映射所具有的性质，我们现在就来考虑这类映射.

2.2.6 定义 设 $F: X \to Y$. 若 $F_{\tau_X} \subset \tau_Y$，则称 F 为**开映射**；若 $F\mathscr{F}_X \subset \mathscr{F}_Y$，则称 F 为**闭映射**.

就应用的广泛性而言，开映射与闭映射当然不及连续映射，但仍有其重要性. 一方面，在与拓扑结构有关的问题中开映射与闭映射概念是必要的；另一方面，开映射与闭映射也常常自然地出现于数学的其他领域.

用很简单的例子就可说明，连续映射、开映射与闭映射三者互有差异[①].

---

① 准确地说，连续映射、开映射与闭映射三者互相独立，肯定或否定其中任一个，可组合出8种情况，每种情况的实例都不难举出.

2.2.7 例 (i) 设 $F = 1_X$ 依式(8). 若 $\tau \supset \tau_1 \neq \tau$, 则 F 是连续映射, 但非开映射与闭映射; 若 $\tau \subset \tau_1 \neq \tau$, 则 F 是开映射与闭映射, 而非连续映射.

(ii) 映射

$$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \to \mathrm{e}^x$$

是开映射但非闭映射, $F\mathbf{R} = (0, \infty)$ 就不是闭集.

(iii) 常值映射

$$F: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \quad x \to 0$$

显然是闭映射, 但非开映射.

对于开映射亦可给出若干不同形式的等价刻画, 以下结果可与定理 2.2.2 及定理 2.2.3 相对照.

2.2.8 定理 对于映射 $F: X \to Y$, 以下条件互相等价:

(i) F 是开映射;

(ii) 对于 X 的某个(或任何)拓扑基 $\mathscr{B}$, 有 $F\mathscr{B} \subset \tau_Y$;

(iii) $\forall x \in X$, 有 $F\mathscr{N}_x \subset \mathscr{N}_{Fx}$ (对照定理 2.2.2(ii));

(iv) $\forall x \in X$, 有 x 的邻域基 $\mathscr{B}_x$, 使得 $F\mathscr{B}_x \subset \mathscr{N}_{Fx}$;

(v) $\forall A \subset X$, 有 $FA^\circ \subset (FA)^\circ$ (对照定理 2.2.3(iv));

(vi) $\forall B \subset Y$, 有 $F^{-1}B^\circ \supset (F^{-1}B)^\circ$;

(vii) $\forall B \subset Y$, 有 $F^{-1}\overline{B} \subset \overline{F^{-1}B}$ (对照定理 2.2.3(v)(vi)).

证 (i)⇒(ii)是平凡的.

(ii)⇒(iii). 设 $\mathscr{B}$ 依条件(ii), $A \in \mathscr{N}_x$, 今证 $FA \in \mathscr{N}_{Fx}$, 即 $Fx \in (FA)^\circ$. 取 $B \in \mathscr{B}$, 使 $x \in B \subset A$, 则 $Fx \in FB \subset FA$, 而 $FB \in \tau_Y$, 故 $Fx \in (FA)^\circ$, 如所要证.

(iii)⇒(iv)是平凡的.

(iv)⇒(v). 设 $A \subset X, x \in A^\circ$, 今证 $Fx \in (FA)^\circ$, 即 $FA \in \mathscr{N}_{Fx}$. 设 $\mathscr{B}_x$ 依条件(iv), 则有 $B \in \mathscr{B}_x$, 使 $x \in B \subset A$, 从而 $Fx \in FB \subset FA$. 因 $FB \in \mathscr{N}_{Fx}$, 故 $FA \in \mathscr{N}_{Fx}$, 如所要证.

(v)⇒(vi). 设条件(v)满足, $B \subset Y$, 则

$$(F^{-1}B)^\circ \subset F^{-1}F(F^{-1}B)^\circ \subset F^{-1}(FF^{-1}B)^\circ \subset F^{-1}B^\circ.$$

(vi)⇒(vii), 参考定理 2.2.3 中(iv)⇒(v)之证.

(vii)⇒(i). 设条件(vii)满足, $A \subset X$ 是开集, 则

$$F^{-1}\,\overline{(FA)^c} \subset \overline{(F^{-1}FA)^c} \subset \overline{A^c} = A^c;$$

$$FA \subset FF^{-1}((\overline{(FA)^c})^c) \subset ((\overline{(FA)^c})^c = (FA)^\circ,$$

这表明 FA 是开集. 故 F 为开映射. □

对照定理 2.2.3 与定理 2.2.8 你会发现, 二者的某些条件似乎恰好相对, 例如 $F^{-1}B^\circ \subset (F^{-1}B)^\circ$ (定理2.2.3(iv))与 $FA^\circ \subset (FA)^\circ$ (定理2.2.8(v)). 这与以

下事实是一致的：若 F 是双射，则 F 连续 $\Leftrightarrow F^{-1}$ 是开映射.

关于闭映射的结论似乎少些.

2.2.9 命题 $F: X \to Y$ 是闭映射 $\Leftrightarrow \forall A \subset X$，有 $F\overline{A} \supset \overline{FA}$.

证明是平凡的.

综合定理2.2.3，2.2.8与命题2.2.9，可得如下结论.

2.2.10 推论 设 $F: X \to Y$ 是一映射.

(i) 若 F 是连续开映射，则

$$F^{-1}B^{\circ} = (F^{-1}B)^{\circ}, \quad F^{-1}\overline{B} = \overline{F^{-1}B}. \quad (B \subset Y) \tag{11}$$

(ii) 若 F 是连续开满射，则

$$F\tau_X = \tau_Y, \quad F\mathscr{N}_x = \mathscr{N}_{Fx} \quad (x \in X); \tag{12}$$

当 $\mathscr{B}$ 是 X 的拓扑基(或 x 的邻域基)时，$F\mathscr{B}$ 是 Y 的拓扑基(或 Fx 的邻域基).

(iii) 若 F 是连续闭映射，则

$$F\overline{A} = \overline{FA} \quad (A \subset X). \tag{13}$$

若 F 是连续闭满射，则 $F\mathscr{F}_X = \mathscr{F}_Y$.

2.3 拓扑的构成

我们曾多次强调拓扑空间的基本性与一般性. 但到现在为止，所接触到的拓扑空间的例子似乎并不多，这与暂时缺少构成拓扑的系统方法有关. 构成拓扑的主要方法有如下几种. 其一是直接给出拓扑，或给出拓扑基(子基)，然后由其生成拓扑，这是我们在2.1A 中已讨论并尝试过的方法，它无疑是必要的，今后仍将使用，但迄今似乎只提供了一些零散的例子. 其二是首先给出异于拓扑的其他结构，然后由这些结构导出(或生成)拓扑. 由度量生成拓扑就是这种方法的一个典型例子，如在2.1D 中所看到的，这确实是构成拓扑的一种简单而有效的方法，它提供了一批拓扑空间的例子. 但这种方法涉及像度量这样更特殊结构的给定，只能用来构成较特殊的拓扑空间. 另外一种似乎更具普遍意义的方法是，用已有的拓扑空间作为“材料”，通过某些标准的程序(例如映射与“运算”)构成新的拓扑空间. 这正是本节所要介绍的方法，它包括相对拓扑、积拓扑与商拓扑的构成. 在某种意义上，可将这种方法称为拓扑空间的“运算”，由此可从少数“基本的”拓扑空间出发，获得大量拓扑空间的例子. 你可能已经熟悉从已知向量空间构成子空间、积空间与商空间，那么本节所述的构成方法正可与之类比，但此处无疑涉及更复杂的处理.

A. 相对拓扑

设 (X,τ) 是给定的拓扑空间，$\varnothing \neq S \subset X$. 若 F 是从 X 到某个拓扑空间的

映射,应如何界定 $F|S$ 的连续性? 实际上,这涉及如何将 S 看作拓扑空间的问题. 现在就来提出一般的解法,它其实是很简单的.

2.3.1 定义　设 $\varnothing \neq S \subset X$. 令

$$\tau_S = \{S \cap A : A \in \tau\}, \tag{1}$$

则 τ_S 是 S 上的一个拓扑(试验证之!),称它为 τ 在 S 上导出的**相对拓扑**,或简称为 S 上的相对拓扑;称 (S,τ_S) 为 (X,τ) 的**拓扑子空间**,或者说 S 是 X 的子空间.

今后说到拓扑空间 $S(S \subset X)$ 而未加说明时,总认定其中使用相对拓扑;而对于任何非空的 $S \subset \mathbf{R}^n$,未加说明时总认定其中使用由通常拓扑导出的相对拓扑,或称为 S 上的通常拓扑. 凡基于相对拓扑的概念均冠以**相对**二字. 例如,τ_S 中的集称为**相对开集**;(S,τ_S) 中的闭集称为**相对闭集**,即 $A \subset S$ 是相对闭集 $\Leftrightarrow S \backslash A \in \tau_S$;$A \subset S$ 在 (S,τ_S) 中的闭包称为**相对闭包**,如此等等. 若 S 是 X 中的开(或闭)集,就称 S 为 X 的开(或闭)子空间. 若 S 是开(或闭)子空间,则 S 中的相对开集(或相对闭集)就是开集(或闭集). 在其他情况下,S 中的相对开集(或相对闭集)未必是 X 中的开集(或闭集).

关于相对拓扑的主要问题是:如何通过有关原拓扑的适当概念来表达或解释相对概念? 这一问题的解决并不难,以下命题汇集了主要的结论.

2.3.2 命题　设 (S,τ_S) 是 (X,τ) 的拓扑子空间,则以下结论成立:

(i) 若 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个拓扑基(或拓扑子基),则

$$\mathscr{B}_S = \{S \cap B : B \in \mathscr{B}\} \tag{2}$$

是 S 的一个拓扑基(或拓扑子基).

(ii) S 中的相对闭集族 $\mathscr{F}_S$ 可表为(对照式(1))

$$\mathscr{F}_S = \{S \cap F : F \subset X \text{ 为闭集}\}. \tag{3}$$

(iii) $\forall x \in S, A \subset S$, A 是 x 的相对邻域 $\Leftrightarrow$ 存在 x 的邻域 B,使得 $A = S \cap B$.

(iv) 设 $\{x_t\} \subset S$ 是一个网,$x \in S$,则在 (S,τ_S) 中 $x_t \to x \Leftrightarrow$ 在 (X,τ) 中 $x_t \to x$[①].

(v) 任给 $A \subset S$,A 的相对闭包 $= S \cap \overline{A}$.

(vi) 设 Y 是一个拓扑空间,$F : X \to Y, G : Y \to S$,则

$$F \in C(X,Y) \Rightarrow F|S \in C(S,Y);$$
$$G \in C(Y,S) \Leftrightarrow G \in C(Y,X).$$

证　大部分结论的证明都是平凡的,详细的证明留给读者作为练习,下面只写出结论(iii)的证明.

---

① 若 $x \overline{\in} S$,即使在 (X,τ) 中 $x_t \to x$,在 (S,τ_S) 中也谈不上 $x_t \to x$.

首先设 A 是 x 的相对邻域，则 A 必含 x 的某个相对开邻域 $S\cap V, V\in\tau$（用式(1)）. 令 $B=A\cup V$，则 B 是 x 的邻域，$S\cap B=A$. 反之，若 $A=S\cap B$，B 是 x 的邻域，则有 $V\in\tau$，使 $x\in V\subset B$；于是

$$x\in S\cap V\subset S\cap B=A,\quad S\cap V\in\tau_S,$$

故 A 是 x 的相对邻域. □

如果说有关相对拓扑的结论大都很简单，那么有关相对拓扑的直观印象则仍有待于从实例中获得. 用实直线 $\mathbf{R}$ 上的例子就很能说明问题. $\mathbf{R}$ 的简单性有助于对概念的描述，而且容易与分析中的经验联系起来. 且看下面的例子.

2.3.3 例 设 $S=[0,2)\subset\mathbf{R}$，τ_S 记相对拓扑. 下面依据命题2.3.2 中的顺序考虑 S 中的诸相对概念.

(i) 拓扑基. 设 $\mathscr{B}$ 依 2.1 节式(4)，则

$$\mathscr{B}_S=\{[0,r),(r,2):0\leqslant r\leqslant 2\}\quad(\text{用式}(2))$$

是 S 的一个拓扑子基，因而 S 有如下拓扑基：

$$\{[0,\beta),(\alpha,\beta):0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\}.$$

(ii) 开集与闭集. $[0,1)=S\cap(-1,1)$ 是 S 中的相对开集，

$$[1,2)=S\cap[1,2]$$

是 S 中的相对闭集. 但$[0,1)$并非开集，$[1,2)$也不是闭集. 事实上，在拓扑空间 S 中，0 是$[0,1)$的内点，而 2 并不是集 $[1,2)$ 的边界点，因 2 根本不在空间 S 之内. 这些事实，在初次接触相对拓扑时是须特别注意的.

(iii) 邻域. $\forall\,\varepsilon\in(0,2]$，$[0,\varepsilon)=S\cap(-1,\varepsilon)$ 是 0 在 S 中的相对邻域，但它不是 0 的邻域. $[0,\varepsilon)$ 可称为 0 的**右邻域**. 实际上在数学分析中已用到右邻域，并用它来刻画单方极限与单边连续，尽管那时并未直接提到相对拓扑.

(iv) 收敛性. 设 $x_n=n^{-1}, y_n=2-n^{-1}, n\in\mathbf{N}$，则在 $\mathbf{R}$ 与 S 中均有 $x_n\to 0$，这就是分析中所说的 $x_n\to 0^+$. 另一方面，尽管在 $\mathbf{R}$ 中 $y_n\to 2$，但在 S 中 $\{y_n\}$ 却不收敛！

(v) 闭包. 设 $A=(1,2)$，则 $\overline{A}=[1,2]$，于是

$$A\text{ 的相对闭包}=S\cap\overline{A}=[1,2),$$

$$A\text{ 的相对边界}=[1,2)\backslash(1,2)=\{1\},$$

即 A 仅有一个相对边界点1，2 并非 A 的相对边界点. 类似地，$B=[0,1]$ 仅有一个相对边界点 1，因而其相对内部为$[0,1)$.

(vi) 连续性. 设 $f=\chi_S$，因 $f|S\equiv 1$，故 $f|S\in C(S)$，即 f 作为 S 上的函数是连续的. 另一方面，f 作为 $\mathbf{R}$ 上的函数有两个间断点：$x=0,2$. 特别，f 在 $x=0$ 间断，但 f 作为 S 上的函数却在 $x=0$ 连续(依分析中的说法就是 f 在 $x=0$ 右连续).

一般地，若 X,Y 是拓扑空间，S 是 X 的子空间，$F:X\to Y$，则 F 在 S 上每

点连续 ⇒ $F|S$ 连续，但反之则未必为真，上面的(vi)就是反例. 因此，在 S 上的上述两种连续性必须仔细区别. 而这又引出一个问题：即使 $X=\mathscr{A}^{\#}$，$\forall A\in\mathscr{A}$，$F|A$ 连续，F 也未必连续. 不过，若 $A\in\mathscr{A}$ 均为开集，则可从 $F|A$ 连续($\forall A\in\mathscr{A}$)推出 F 连续. 这就是极有价值的以下结果.

2.3.4 拼接引理　设 $F:X\to Y$，$X=\mathscr{A}^{\#}$，$\mathscr{A}$ 是非空**开集族**或非空**闭集的有限族**. 若 $\forall A\in\mathscr{A}$，有 $F|A\in C(A,Y)$，则 $F\in C(X,Y)$.

证　只考虑 $\mathscr{A}$ 为开集族的情况，对闭集族的情况，证明是类似的. 任给开集 $V\subset Y$，有

$$F^{-1}V=\bigcup\{(F|A)^{-1}V:A\in\mathscr{A}\}.$$

$\forall A\in\mathscr{A}$，由 $F|A$ 连续推出 $(F|A)^{-1}V$ 是 A 的开子集(用定理2.2.3)，从而亦是 X 的开子集. 因此 $F^{-1}V$ 是 X 的开子集，于是 $F\in C(X,Y)$. □

今后将多次用到引理2.3.4. 一般用法是：选定开集族(或有限闭集族)$\mathscr{A}$，使 $\mathscr{A}^{\#}=X$；$\forall A\in\mathscr{A}$，作 $F_A\in C(A,Y)$；验证

$$F_A|A\cap B=F_B|A\cap B\quad(A,B\in\mathscr{A}),$$

则由引理2.3.4即可断定：有唯一 $F\in C(X,Y)$，使 $F|A=F_A(\forall A\in\mathscr{A})$. 这样的 F 可看作由 $\{F_A:A\in\mathscr{A}\}$ **拼接**而成. 在分析中，判定所谓**分段函数**的连续性时，实际上就用了拼接引理，只是未加注意罢了.

B. 积拓扑

首先在集的层次上讨论积的概念. 在定义1.1.2中已定义了有限个集的积集，今作进一步的推广. 设

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\prod X_i,$$

则 x 实际上是一个映射：

$$x:I\to\bigcup X_i,\quad i\to x_i\in X_i,$$

其中 $I=\{1,2,\cdots,n\}$. 若取 I 为任何非空集，就得到一般的积集概念. 这就引出以下定义.

2.3.5 定义　设 I 是一非空集，$\{X_i:i\in I\}$ 是一集族. 令

$$X=\{x|x:I\to\bigcup X_i,x(i)\in X_i(\forall i\in I)\},\tag{4}$$

称 X 为 $X_i(i\in I)$ 的**积集**(亦称为卡氏积)，记作

$$\prod_{i\in I}X_i,\quad 或\prod_i X_i,\prod X_i.$$

以下设 X 依式(4). 显然 $X\neq\varnothing\Leftrightarrow X_i\neq\varnothing(\forall i\in I)$[①]. 任给 $x\in X$，约定 $x=(x_i)$，其中 $x_i=x(i)$，称 x_i 为 x 的"第 i 坐标"或"第 i 分量"$(i\in I)$. 这些

① 严格地说，这已用到选择公理1.2.4. 实际上，选择公理可以表述成：任何一族非空集的积集非空.

约定使得积集(4)获得某种类似于有限积(见1.1节式(8))的外观,这对于积集及下面要定义的积拓扑的理解都是重要的. 给定 $i \in I$, 称映射

$$P_i: X \to X_i, \quad x \to x_i \tag{5}$$

为**投影**,它显然是一个满射. 若 $A_i \subset X_i (i \in I)$, 则有自然的包含

$$\prod A_i \subset \prod X_i,$$

且可验证

$$\prod A_i = \bigcap P_i^{-1} A_i. \tag{6}$$

若 $X_i = Y (\forall i \in I)$, X 依式(4),则记 X 为 Y^I, 这种情况下的积集 Y^I 无非是从 I 到 Y 的映射之全体. 因此,给定一个映射 $F: I \to Y$, 乃与给定一个元 $F \in Y^I$ 相当. 这一事实已从一个角度说明了积集概念的重要性. 如果 $|I| = |J|$, 则 I 与 J 之间的某个双射自然地诱导出从 Y^I 到 Y^J 的一个双射. 在这个意义上,可以说 Y^I 与 Y^J 实质上是一样的. 这就表明 Y^I 实质上仅决定于 I 的基数,通常就将其记作 Y^α, $\alpha = |I|$. 对于 $n \in \mathbf{N}$, n 重积 Y^n 已在1.1A 中考虑过. 依以上约定,对于 $\omega = |\mathbf{N}|$, Y^ω 即记 $Y^{\mathbf{N}}$, 它就是 Y 中的无限序列之全体. 例如, $\mathbf{R}^\omega$ 就是无限实数列之全体. 依现在的记号,例2.1.6 中所讨论的空间就是 $\mathbf{R}^\omega$.

联系于积集,有两种构成映射的方法. 首先,任给一族映射 $\varphi_i: \Omega \to X_i (i \in I)$, 可唯一地构成映射

$$\varphi: \Omega \to X, \quad \omega \to (\varphi_i(\omega)), \tag{7}$$

其中 X 依式(4). 称如上的 φ 为 $\varphi_i (i \in I)$ 的**对角线映射**,记作 $\varphi = (\varphi_i)$, 称 φ_i 为 φ 的"第 i 个分量". 显然, φ 与 $\{\varphi_i\}$ 依关系 $P_i \varphi = \varphi_i$ 相互唯一确定, P_i 依式(5). 若 $\Omega = J$ 是某个实区间,则可将 $\varphi(t) (t \in J)$ 想象为积集 X 中的一条"曲线",它以 $x = \varphi(t) (t \in J)$ 为其"参数方程".

其次,若给定一族映射 $F_i: X_i \to Y_i (i \in I)$, 则可定义所谓**积映射**

$$\prod F_i: \prod X_i \to \prod Y_i, \quad (x_i) \to (F_i x_i). \tag{8}$$

例如,若 $I = \{1,2\}$, 则积映射 $F_1 \times F_2$ 定义为

$$F_1 \times F_2: (x_1, x_2) \to (F x_1, F_2 x_2). \tag{8$'$}$$

形如式(8)′的积映射在本书第4章中将要用到.

作了上述准备之后,现在转向考虑积拓扑.

以下设 $(X_i, \tau_i) (i \in I)$ 是一族拓扑空间,今要在积集 X (依式(4))中定义某种拓扑 τ. 导入积拓扑的想法是很自然的:若 $\{x^t\}$ ① $\subset X$ 是一个网, $x \in X$, 则我们希望依拓扑 τ 有

① 将 t 写作上指标,是为了便于写 $x^t = (x_i^t)$. 今后用到积空间中的网时,都用这种写法. 注意在定理2.1.10(iv)中就用了这种写法.

$$x^t \to x \Leftrightarrow x_i^t \to x_i (\forall\, i \in I), \tag{9}$$

这意味着 (X,τ) 中的收敛即依坐标收敛，就如同我们熟知的Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛一样. 而式(9)显然推出投影 $P_i(i \in I$，依式(5)) 均连续(用命题 2.2.2 (iv))，因此应有 $P_i^{-1}\tau_i \subset \tau$ (依定理2.2.3(ii)). 这就启示出以下定义.

2.3.6 定义 设 $(X_i,\tau_i)(i \in I)$ 是一族拓扑空间，P_i 依式(5)，

$$\mathscr{B} = \bigcup P_i^{-1}\tau_i, \tag{10}$$

则以$\mathscr{B}$ 为子基在 $X = \prod X_i$ 中生成唯一拓扑 τ (依命题2.1.5)，称 τ 为 X 上的**积拓扑**，称 X 或 (X,τ) 为 $X_i(i \in I)$ 的积拓扑空间，简称为**积空间**；X_i 称为积空间 X 的第 i 个因子空间或坐标空间.

积拓扑是俄罗斯数学家Tychonoff 于1930 年代引入的，积拓扑的一些最重要的结果亦为Tychonoff 所建立.

积拓扑的逻辑表述并不复杂，但其直观意义尚不明显. 要完全理解积拓扑，需在全面阐明积拓扑的性质(见下面的命题2.3.7)之后. 目前要做的是解释积拓扑的基开集的结构. 设$\mathscr{B}$ 依式(10)，则$\mathscr{B}^*$ 是积拓扑的拓扑基. 任给 $B \in \mathscr{B}^*$，不难看出，B 总可以表为如下形式：

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} P_{i_k}^{-1}B_k \quad (B_k \in \tau_{i_k}, 1 \leqslant k \leqslant n), \tag{11}$$

其中 $\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$ 是 I 的某个有限子集. 注意到 $X = P_i^{-1}X_i(\forall\, i \in I)$ 与式(6)，式(11)又可以改写成更具启发性的如下形式：

$$B = \prod_{k=1}^{n} B_k \times \prod_{i \neq i_1,\cdots,i_n} X_i. \tag{11$'$}$$

若 $I = \{1,2,\cdots,n\}$，则不妨设 $B_k \in \tau_k(1 \leqslant k \leqslant n)$，因而

$$B = \prod_{k=1}^{n} B_k = \bigcap_{k=1}^{n} P_k^{-1}B_k. \tag{12}$$

式(12)可看作以 $B_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 为边的开方体. 积拓扑具有形如式(11)或式(12)的基开集，是今后要不断用到的一个基本事实.

以下命题汇集了积拓扑的基本性质.

2.3.7 命题 设 $(X_i,\tau_i)(i \in I)$ 是一族拓扑空间，X 与 $P_i(i \in I)$ 分别依式(4)与式(5)，τ 是 X 上的积拓扑. 则以下结论成立：

(i) 若 $\mathscr{B}_i$ 是 $\tau_i(i \in I)$ 的拓扑子基，则 $\bigcup P_i^{-1}\mathscr{B}_i$ 是 τ 的拓扑子基；因而 τ 有形如式(11)或式(11)$'$的基开集，其中 $B_k \in \mathscr{B}_{i_k}$.

(ii) $\forall\, x \in X$，x 有形如式(11)或式(11)$'$的基邻域，其中 B_k 是 x_{i_k} 的基邻域，$1 \leqslant k \leqslant n$，$\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$ 是 I 的任何有限子集；而 $\bigcup P_i^{-1}\mathscr{B}_i$ 是 x 的邻域子基，只要 $\mathscr{B}_i$ 是 $x_i(\forall\, i \in I)$ 的邻域子基.

(iii) $P_i(i \in I)$ 均为连续开映射；τ 是 X 上使每个 P_i 连续的最小拓扑.

(iv) 任给网 $\{x^t\}\subset X$ 与 $x\in X$，等价关系式(9)成立.

(v) 若 $A_i\subset X_i(i\in I)$，则

$$\overline{\prod A_i}=\prod\overline{A}_i,\tag{13a}$$

$$\left(\prod A_i\right)^\circ=\prod A^\circ{}_i,\tag{13b}$$

对于式(13b)，假定 I 是有限集. 由式(13)直接推出：闭集的积集是闭集，有限个开集的积集是开集.

(vi) 任给拓扑空间 Ω 与映射 $\varphi=(\varphi_i):\Omega\to X$（记号依式(7))，$\varphi$ 连续 $\Leftrightarrow$ $\varphi_i(i\in I)$ 均连续.

命题2.3.7中的结论(iii)表明积拓扑具有某种最小性，因而积拓扑也称为**弱拓扑**；对于许多问题(如涉及紧性与连通性的问题)，弱拓扑表现出明显优势. 命题2.3.7中的结论(iv)与(vi)可概括为：积空间中的收敛与连续分别归结为**依坐标收敛与依坐标连续**，这一事实最典型地表现了积拓扑的特征，凸显出积空间与Euclid空间 $\mathbf{R}^n$ 的类似性. 通常，称积拓扑为依坐标收敛拓扑或点态收敛拓扑. 鉴于积拓扑完全由其收敛性决定，对于 X 中的某个拓扑 τ_1，只要能判定 X 中依 τ_1 的收敛满足关系式(9)，即可断定 τ_1 就是积拓扑，而不必去直接考察 τ_1 的构成. 今后在涉及积拓扑时，不可不注意到以上事实.

证 (i)与(ii)是明显的，证明细节留给读者(参看习题62,63).

(iii) 因 τ 是 X 上包含 $\bigcup P_i^{-1}\tau_i$ 的最小拓扑(依命题2.1.5)，故 τ 是 X 上使每个 P_i 连续的最小拓扑(参看定理2.2.3(ii)). 设 B 是一个表为式(11)′的基开集，取定 $i\in I$，则

$$P_iB=\begin{cases}B_k, & i=i_k,1\leqslant k\leqslant n,\\ X_i, & i\in I\setminus\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}.\end{cases}$$

可见恒有 $P_iB\in\tau_i$，因而 P_i 为开映射(用定理2.2.8(ii)).

(iv) 若 $x^t\to x$，则由 P_i 连续得 $x_i^t\to x_i(\forall\, i\in I)$. 反之，设 $x_i^t\to x_i(\forall\, i\in I)$. 任给 x 的子基邻域 $P_i^{-1}A$，此处 $x_i\in A\in\tau_i, i\in I$，由 $x_i^t\to x_i$ 知 $\exists\, t_0,\forall\, t\geqslant t_0$ 有 $x_i^t\in A$，从而 $x^t\in P_i^{-1}A(\forall\, t\geqslant t_0)$. 这表明 $x^t\to x$(用2.1节式(9)).

(v) 首先由式(6)及定理2.2.3(v)有

$$\begin{aligned}\overline{\prod A_i}&=\overline{\bigcap P_i^{-1}A_i}\subset\bigcap\overline{P_i^{-1}A_i}\\&\subset\bigcap P_i^{-1}\overline{A}_i=\prod\overline{A}_i.\end{aligned}$$

其次，若 $x\in X\setminus\overline{\prod A_i}$，则 x 有一形如(11)的开邻域(用(ii))，它与 $\prod A_i$ 不交. 于是对某个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，有 $A_{i_k}\cap B_k=\varnothing$，而 $x_{i_k}\in B_k$，这推出 $x_{i_k}\overline{\in}\,\overline{A_{i_k}}$(用2.1节式(11))，从而 $x\overline{\in}\prod\overline{A}_i$. 这就证得式(13a). 其次设 I 为有限集，则

$$\left(\prod A_i\right)^\circ=\left(\bigcap P_i^{-1}A_i\right)^\circ=\bigcap\left(P_i^{-1}A_i\right)^\circ\quad(\text{用 2.1 节式(19)}')$$

$$=\bigcap P_i^{-1}A^\circ_i = \prod A^\circ_i. \qquad \text{(用(iii) 与 2.2 节式(11))}$$

这就证明了式(13).

(vi) 若 $\varphi\in C(\Omega,X)$，则 $\varphi_i = P_i\varphi\in C(\Omega,X_i),i\in I$ (用(iii)). 反之，设 $\varphi_i\in C(\Omega,X_i)(\forall\, i\in I)$，则对 X 中任一子基开集 $P_i^{-1}V_i(V_i\in\tau_i,i\in I)$,

$$\varphi^{-1}(P_i^{-1}V_i) = (P_i\varphi)^{-1}V_2 = \varphi_i^{-1}V_i \qquad \text{(用 1.1 节式(16))}$$

是 Ω 中的开集，因此 $\varphi\in C(\Omega,X)$ (用定理 2.2.3(iii)). □

今后提到一族拓扑空间的积空间而未加说明时，总认定其中采用积拓扑.

现在用一些例子来解释积拓扑.

2.3.8 例 (i) Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$. 在命题 2.1.15(i)中，我们已将 $\mathbf{R}^n$ 中的通常拓扑 τ 定义为由 Euclid 度量(见 2.1 节式(26))生成的拓扑，今指明 τ 就是积拓扑，因而可对它应用命题2.3.7 的结论. 设 $|x|(x\in\mathbf{R}^n)$ 依2.1 节式(26)，则容易验证

$$\max_i|x_i|\leqslant|x|\leqslant\sum|x_i|. \quad (x=(x_i)\in\mathbf{R}^n) \tag{14}$$

若 $\{x^t\}\subset\mathbf{R}^n$ 是一个网，$x\in\mathbf{R}^n$，则由式(14)有

$$\max_i|x_i^t-x_i|\leqslant d(x^t,x)\leqslant\sum_i|x_i^t-x_i|.$$

而这就表明

$$d(x^t,x)\to 0\Leftrightarrow x_i^t\to x_i(1\leqslant i\leqslant n),$$

即 $\mathbf{R}^n$ 中的度量收敛亦即依坐标收敛，因而 $\mathbf{R}^n$ 中的通常拓扑就是积拓扑(依命题 2.3.7(iv)).

一旦确定了 $\mathbf{R}^n$ 中的通常拓扑是积拓扑，就可从命题 2.3.7 得出种种结论. 例如，形如

$$\prod(a_i,b_i) \quad (-\infty<a_i<b_i<\infty,1\leqslant i\leqslant n)$$

的开方体构成 $\mathbf{R}^n$ 的一个拓扑基(用命题2.3.7(i))；任给 $x\in\mathbf{R}^n$，x 的所有方体形邻域

$$\prod(x_i-\varepsilon,x_i+\varepsilon) \quad (0<\varepsilon\in\mathbf{R})$$

构成 x 的一个邻域基(用命题 2.3.7(ii))，它的作用与球形邻域基

$$\{B_\varepsilon(x):0<\varepsilon\in\mathbf{R}\}$$

等价. 若

$$\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)) \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

是取值于 $\mathbf{R}^n$ 中向量值函数，则 φ 连续 $\Leftrightarrow$ $\varphi_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 均连续(用命题 2.3.7(vi))；当 φ 连续时，它就是 $\mathbf{R}^n$ 中的**连续曲线**.

若在 $\mathbf{R}^n$ 中改用度量

$$\begin{cases} d(x,y) = \| x - y \|, \\ \| x \| = \sum |x_i| \quad (x = (x_i) \in \mathbf{R}^n), \end{cases} \tag{15}$$

则容易看出依式(15)的度量收敛仍然是依坐标收敛,因而其度量拓扑也是通常拓扑. 这就表明,$\mathbf{R}^n$ 中的通常拓扑可由不同的度量生成.

(ii) 空间 $X = \mathbf{R}^\Omega$. 设 Ω 是任一非空集,在 $X = \mathbf{R}^\Omega$ 中采用积拓扑. 如前面已指出的,X 就是定义于 Ω 上的实值函数之全体. 今应用命题2.3.7来得出关于函数空间 X 的若干结论. 注意,当 $|\Omega| = n$ 时 $\mathbf{R}^\Omega$ 就是(i)中已考察的Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$,因此一般的空间 $\mathbf{R}^\Omega$ 可看作 $\mathbf{R}^n$ 的推广. $\forall\, \omega \in \Omega$,依式(5)定义的投影 P_ω 现在具有以下形式:

$$P_\omega: X \to \mathbf{R}, \quad f \to f(\omega).$$

对任何区间 $\delta = (a,b) \subset \mathbf{R}, \omega \in \Omega$,有

$$P_\omega^{-1}\delta = \{f \in X : f(\omega) \in \delta\}. \tag{16}$$

结合以上事实与命题2.3.7(i)、(ii)得出,X 有形如式(16)的子基开集与形如

$$\{f \in X : f(\omega_i) \in \delta_i (1 \leqslant i \leqslant n)\} \tag{17}$$

的基开集;$f \in X$ 有形如

$$\{g \in X : |f(\omega) - g(\omega)| < \varepsilon\} \tag{18}$$

的子基邻域与形如

$$\{g \in X : |f(\omega_i) - g(\omega_i)| < \varepsilon (1 \leqslant i \leqslant n)\} \tag{19}$$

的基邻域. 式(16)与式(18)中的 ω 遍取 Ω,式(17)与式(19)中的 $\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ 遍取 Ω 的所有非空有限子集,式(16)与式(17)中的 $\delta, \delta_1, \cdots, \delta_n$ 遍取所有实开区间,式(18)与式(19)中的 ϵ 遍取所有正实数. 由命题2.3.7(iv),若 $\{f_t\} \subset X$ 是一个网,$f \in X$,则在 X 中

$$f_t \to f \Leftrightarrow f_t(\omega) \to f(\omega) (\forall\, \omega \in \Omega), \tag{20}$$

这表明 X 中的收敛就是在 Ω 上每点收敛或称**点态收敛**. 特别,对于 Ω 上的函数序列 $\{f_n\}$,有

$$f_n \to f \Leftrightarrow f_n(\omega) \to f(\omega) (\forall\, \omega \in \Omega). \tag{20$'$}$$

这就使得函数列的点态收敛被纳入到一个拓扑框架之内.

将以上所述与例2.1.6对照,你看出例2.1.6中所考虑的空间 X 无非就是 $\mathbf{R}^N$ 或 $\mathbf{R}^\omega$,其中的拓扑正是积拓扑,由2.1节式(5)所表示的基开集正好与由式(17)表示的基开集(但取 $\Omega = \mathbf{N}$)相当.

(iii) 一般函数空间 $F = Y^X$. 设 X 是任一非空集,Y 是一拓扑空间,在 F 中采用积拓扑,在这种特殊情况下通常称为**点态收敛拓扑**. (ii)中对于空间 $\mathbf{R}^\Omega$ 的种种结论,都可推广为关于空间 F 的类似结论. 例如,$\forall\, x \in X$,

$$P_x: F \to Y, \quad f \to f(x)$$

是连续开映射，通常记作 e_x，并称为 x 处的**赋值映射**. $\forall\, x \in X, G \in \tau_Y$，令

$$V_{xG} = e_x^{-1}G = \{f \in F : f(x) \in G\}. \tag{16)'$$

所有形如式(16)′的集构成 F 的一个拓扑子基，因而点态收敛拓扑也称为**点开拓扑**. F 对应于式(17)的基开集是

$$\bigcap V_{x_iG_i} = \{f \in F : f(x_i) \in G_i(1 \leqslant i \leqslant n)\}, \tag{17)'$$

其中 $x_i \in X, G_i \in \tau_Y(1 \leqslant i \leqslant n)$；$f \in F$ 有形如

$$\{g \in F : g(x) \in G\}, f(x) \in G \in \tau_Y, x \in X \tag{18)'$$

的子基邻域与形如

$$\{g \in F : g(x_i) \in G_i(1 \leqslant i \leqslant n)\} \tag{19)'$$

的基邻域，式(19)′中 $\{x_i\}$ 遍取 X 的所有非空有限子集，G_i 遍取 $f(x_i)$ 的开邻域. 若 $\{f_t\} \subset F$ 是一个网，$f \in F$，则在 F 中

$$f_t \to f \Leftrightarrow f_t(x) \to f(x)(\forall\, x \in X), \tag{20)''$$

即 F 中的收敛就是点态收敛.

(iv) 约定以 S^1 记 $\mathbf{R}^2$ 中的单位圆周：

$$S^1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R} : x_1^2 + x_2^2 = 1\}. \tag{21}$$

利用 S^1 经“积运算”可得出一些令人感兴趣的积空间. 例如

$$S^1 \times J, \quad T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1(n\text{ 重积})$$

等，其中 $J = [a, b]$. 不难看出，$S^1 \times J$ 是圆柱面. T^n 称为 n 重环，可能不容易想象它的直观形态；T^2 则可看作一个形如轮胎的环面. 但不论是否可将 T^n 与某个常识中的图形对应起来，T^n 作为积空间是一个意义明确的拓扑空间是毫无疑问的. 这一类的积空间在拓扑学中颇有用处. 在应用它们时，通常仅需依据关于积拓扑的适当定理推出它们具有何种拓扑性质，而未必需要直接描述其拓扑构成.

(v) S^1 的一个 n 维推广就是 n 维球面：

$$S^n = \left\{x = (x_i) \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\right\}. \tag{22}$$

注意，不应将 S^n 误看作 S^1 的 n 重积，后者是 T^n，而当 $n > 1$ 时 S^n 与 T^n 是完全不同的！同样可用 S^n 作为基本构块来构成新的拓扑空间，例如，

$$S^n \times \mathbf{R}, \quad S^n \times S^1, \quad S^n \times S^n$$

等都是有意义的例子，尽管其直观意义尚需适当的解释.

C. 商拓扑

在 1.1B 中已说到商集：若～是 X 上的一个等价关系，则商集 $X/\sim$ 就是 X 中依关系～的等价类之全体. 以 $\tilde{x}$ 记 $x(x \in X)$ 所属的等价类，而商集 $X/\sim$ 则写作 $\widetilde{X}$. 这样，投影 P 可写成(参看 1.1 节式(22))：

$$P : X \to \widetilde{X}, \quad x \to \tilde{x}. \tag{23}$$

现在设 (X, τ) 是一拓扑空间. 如何在商集 $\widetilde{X}$ 中导入某种商拓扑呢？回想一

下，在积集中导入积拓扑时，我们受到自然的收敛条件(9)的启发. 然而，类似的思路对于引入商拓扑并不合适. 另一种更具几何色彩的考虑却值得一试：设想每个等价类中的点被粘合成一点了；一个集 $B\subset\widetilde{X}$ 被看作开集，似乎应当是在撤除粘合之后，B 恰好成为 X 中的开集，而这意味着 $P^{-1}B\in\tau$，P 依式(23). 于是作以下定义.

2.3.9 定义 设 (X,τ) 是一拓扑空间，$\widetilde{X}$ 是由等价关系～决定的商集，P 依式(23)，则

$$\tilde{\tau}=\{B\subset\widetilde{X}: P^{-1}B\in\tau\} \tag{24}$$

是 $\widetilde{X}$ 上的一个拓扑(试验证之!)，称它为 $\widetilde{X}$ 上的**商拓扑**，而称 $(\widetilde{X},\tilde{\tau})$ 为 X 的商拓扑空间，或者说 $\widetilde{X}$ 是 X 的**商空间**.

商拓扑与商空间也分别称为**粘合拓扑与粘合空间**.

注意，式(24)相当于 $B\in\tilde{\tau}\Leftrightarrow P^{-1}B\in\tau$；而这又推出：

$$\mathscr{B}\subset\tilde{\tau}\Leftrightarrow P^{-1}\mathscr{B}\subset\tau. \quad (\mathscr{B}\subset 2^{\widetilde{X}}) \tag{25}$$

与积拓扑比较，商拓扑的定义似乎更简单. 但当我们着手建立商拓扑 $\tilde{\tau}$ 与原拓扑 τ 的进一步的联系时，发现情况并不乐观，关键在于定义式(24)并不是一个特别便于应用的公式. 试与积拓扑的定义对比一下. 依据定义2.3.6，利用拓扑子基(10)，原则上我们总可以写出积空间中的整个开集族. 这就表明，积拓扑的定义是**构造性**的. 与之相反，看来更简单的定义式(24)却不是构造性的：我们不知道如何用 X 中的开集通过一定运算(包括映射)得出 $\widetilde{X}$ 中的开集. $B\in\tilde{\tau}\Leftrightarrow P^{-1}B\in\tau$，这在逻辑上当然已经完全清楚，但这个定义本身并未提供判定 $P^{-1}B\in\tau$ 的一般方法. 这就毫不奇怪，商拓扑与原拓扑的联系从表面上看来更复杂，并不能得到像命题2.3.7那样丰富且便于应用的结果. 尽管如此，我们还是有不无价值的以下命题.

2.3.10 命题 设 $(\widetilde{X},\tilde{\tau})$ 是拓扑空间 (X,τ) 的商空间，P 依式(23)，则以下结论成立：

(i) $\tilde{\tau}$ 是 $\widetilde{X}$ 上使 P 连续的最大拓扑(对照命题2.3.7(iii)).

(ii) $B\subset\widetilde{X}$ 依商拓扑为闭集 $\Leftrightarrow$ $P^{-1}B$ 是 X 中的闭集.

(iii) 设 (Y,τ_Y) 是另一个拓扑空间，映射 $F: X\to Y$ 满足条件

$$P^{-1}\circ P\subset F^{-1}\circ F, \quad 即\ Px=Py\Rightarrow Fx=Fy. \tag{26}$$

则存在唯一映射 $G:\widetilde{X}\to Y$，使得 $GP=F$；G 连续 $\Leftrightarrow$ F 连续.

条件(26)相当于说：F 在 X 中每个～等价类上为常数. G 称为 F 的导出映射，也记作 F_*，以显示它与代数中的导出同态的类似性(参考定理1.3.7).

证 (i) 由式(25)直接看出 $P^{-1}\tilde{\tau}\subset\tau$，因此

$$P:(\widetilde{X},\tilde{\tau})\to(X,\tau)$$

连续(用定理2.2.3(ii)). 若 τ_1 是 $\widetilde{X}$ 上一拓扑，且

$$P:(X,\tau)\to(\widetilde{X},\tau_1)$$

连续，则 $P^{-1}\tau_1\subset\tau$，于是由式(25)推出 $\tau_1\subset\tilde{\tau}$. 这表明 $\tilde{\tau}$ 是 $\widetilde{X}$ 上使 P 连续的最大拓扑.

(ii)是式(24)的直接推论.

(iii) 定义

$$G:\widetilde{X}\to Y,\quad \tilde{x}\to Fx. \tag{27}$$

因由条件(26)有 $\tilde{x}=\tilde{y}\Rightarrow Fx=Fy$，故 G 是一个合理的映射. G 的定义直接表明 $GP=F$，因此 G 连续 $\Rightarrow F$ 连续. 反之，若 F 连续，则

$$P^{-1}G^{-1}\tau_1=(GP)^{-1}\tau_1=F^{-1}\tau_1\subset\tau,$$

于是由式(25)有 $G^{-1}\tau_1\subset\tilde{\tau}$，可见 G 连续(用定理2.2.3(ii)). □

至于在命题2.3.7中对积拓扑得出很好结论的拓扑基、邻域基、收敛性与闭包等概念，对于商拓扑却得不出令人满意的结论. 这正是商拓扑问题常常遭遇困难的原因之一.

如果说，对于商拓扑性质的探讨难以深入下去，不免令人失望，那么，商空间构成的高度灵活性则足以令人满意. 我们已说到，$\widetilde{X}$ 是从粘合 X 中的点得到的，而对于哪些点应粘合在一起，却未加**任何限制**. 正是这种选择粘合的随意性，致使商空间呈现出极大的多样性，因而为新的拓扑空间的出现提供了一个丰富的源泉. 当然，只有那些多少具有特定意义的粘合手续，才会获得有价值的空间. 下面就是一些不无趣味的简单例子，它们在拓扑学中被普遍引用. 对于这些例子，我们主要关注其所用的粘合及其直观意义，而不去具体描述商拓扑的构成.

2.3.11 例 设 $J=[0,1]$，它作为 $\mathbf{R}$ 的子空间采用通常拓扑.

(i) 圆周 S^1. 粘合点0与1(对未提及的点不进行任何粘合，下同)，得到商空间

$$\widetilde{J}=\{x:0<x<1\}\cup\{\{0,1\}\}. \tag{28}$$

想象一下：将一线段弯过来，使其两端能粘合在一起. 如此所得，不正是一个圆周吗？是否可以认为商空间 $\widetilde{J}$ 就是 S^1 (依式(21))呢？后面我们将严格地解答这一问题.

(ii) 圆柱面. 设正方形 $X=J\times J$ 具有积拓扑. 粘合 X 的一对竖边，即粘合点 $(0,y)$ 与 $(1,y)(0\leqslant y\leqslant 1)$，则得到商空间

$$\widetilde{X}=\{(x,y):0<x<1,0\leqslant y\leqslant 1\}\cup\{\{(0,y),(1,y)\}:0\leqslant y\leqslant 1\}. \tag{29}$$

类比于式(28)，能够说 $\widetilde{X}$ 就是圆柱面吗？后面将肯定这一点.

(iii) 环面. 设 X 仍如(ii)，但除粘合 X 的一对竖边之外，还粘合它的一对横边，则得到商空间

$$\widetilde{X}=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$$

$$\cup \{\{(0,y),(1,y)\}: 0<y<1\}$$
$$\cup \{\{(x,0),(x,1)\}: 0<x<1\}$$
$$\cup \{\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\}. \tag{30}$$

如果能将式(29)看作一个圆柱面,那么式(30)就是弯曲圆管两端对接的结果,它不就是环面 T^2 吗?

(iv) Klein 瓶. 若将式(30)修改为横边反向粘合,即点 $(x,0)$ 与 $(1-x,1)(0<x<1)$ 粘合,则得到商空间

$$K=\{(x,y): 0<x<1, 0<y<1\}$$
$$\cup \{\{(0,y),(1,y)\}: 0<y<1\}$$
$$\cup \{\{(x,0),(1-x,1)\}: 0<x<1\}$$
$$\cup \{\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\}, \tag{31}$$

它就是著名的**Klein 瓶**.

如果认为式(30)是圆管的对接,那么 K 就是圆管两端沿相反方向对接的结果. 不妨尝试一下用一个模型来实现这种对接,你会发现根本无法做到这一点!这就表明 K 竟然不能与 $\mathbf{R}^3$ 中某个曲面联系起来. 不过,这并不影响 K 作为一个确定的拓扑空间而存在. 须知,构成商空间时所用到的“粘合”一词,只是一种借喻,并不意味着一定可在某个物理模型上实际施行. 如果一定要赋予 Klein 瓶以某种直观形象,则可以考虑如图 2-1 所示的虚拟图形:圆筒的一端弯转,然后穿过筒壁与另一端反向对接. 如果一只蚂蚁沿 Klein 瓶爬行,它必定可从“外侧”进入“内侧”,因而 K 实际上并无内外侧之分!

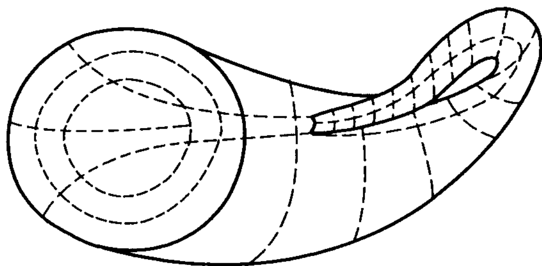


图 2-1

正是像 Klein 瓶这类怪异“曲面”所激发的无穷遐想,在拓扑学的发展早期引发了人们的浓厚兴趣. 在空间观念已高度扩展的今天,Klein 瓶已不再有什么神秘性了. 你会怀疑 $\mathbf{R}^n(n>3)$ 的现实性吗?那么 Klein 瓶的现实性一点也不比 $\mathbf{R}^n$ 差!

(v) 投影平面. 现在将 $X=J\times J$ 的两组对边均反向粘合,则得到商空间

$$P^2=\{(x,y): 0<x<1, 0<y<1\}$$

$$\cup \{\{(0,y),(1,1-y)\}: 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$
$$\cup \{\{(x,0),(1-x,1)\}: 0 < x < 1\}, \qquad (32)$$

它就是所谓**投影平面**. 如同 Klein 瓶一样，我们也无法在 $\mathbf{R}^3$ 中为 P^2 构造一个直观模型，甚至无法给出一个类似于图 2-1 所示的虚拟图形.

在说到商空间(28)～(30)时，我们非正式地将它们与圆周、圆柱面、环面联系起来. 现在要指明，对这种联系可赋予一种完全严格的意义，这基于以下基本结果.

2.3.12 定理 设 (X,τ) 与 (Y,τ_Y) 是两个拓扑空间，$F: X \to Y$ 是一满射，它有性质：

$$B \in \tau_Y \Leftrightarrow F^{-1}B \in \tau \quad (B \subset Y). \qquad (33)$$

设 $\widetilde{X}$ 是由等价关系 $F^{-1} \circ F$ (依1.1.5)决定的商集，其中采用商拓扑，映射 $G: \widetilde{X} \to Y$ 依式(27)，则 G 是一个连续双射且有连续的逆映射.

注意，定理 2.3.12 与同态定理 1.3.7 的类似性，此处的 F 恰好对应于定理 1.3.7中的满同态 h，而 G 则与同构 h_* 相当.

证 以 P 记投影 $X \to \widetilde{X}$，则由 $\widetilde{X}$ 的定义有 $P^{-1} \circ P = F^{-1} \circ F$ (参看命题 1.1.5之证)，故条件(26)满足. 由条件式(33)推出 F 连续，因而由命题 2.3.10 (iii)有 $G \in C(\widetilde{X},Y)$. 由 F 为满射及式(27)知 G 为满射. $\forall\, x,y \in X$，有

$$G\tilde{x} = G\tilde{y} \Rightarrow Fx = Fy \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{y},$$

可见 G 为单射，因而是双射. 设 $\tilde{\tau}$ 是 $\widetilde{X}$ 上的商拓扑，则

$$F^{-1}G\tilde{\tau} = (G^{-1}F)^{-1}\tilde{\tau} = P^{-1}\tilde{\tau} \subset \tau,$$

其中用到 $GP = F$ (参看命题2.3.10(iii)). 于是由条件式(33)得出 $G\tilde{\tau} \subset \tau_Y$，这表明 G 是开映射(依定义 2.2.6)，因而 G^{-1} 连续. □

具有连续逆映射的连续映射称为同胚(正式定义见定义 2.4.1)，因此定理 2.3.12等于说 G 是一个同胚. 在 2.4 节中我们将阐明互相同胚的拓扑空间并无实质性差别，因而不妨视为等同. 依这种观点，定理2.3.12 中的 $\widetilde{X}$ 与 Y 就不必区别，都可同等地看作 X 的商空间. 而从形式上看，Y 或许比 $\widetilde{X}$ 更直观，更为我们所熟悉，这就为商空间 $\widetilde{X}$ 提供了一个可能更好理解与把握的模型. 定理 2.3.12 的意义正在于此. 在这个意义上，定理2.3.12 的作用恰如同态定理1.3.7 对于商群的作用.

然而，应用定理 2.3.12 的前提是存在一个满足条件式(33)的满射 $F: X \to Y$. 鉴于这种映射的重要性，特作以下定义.

2.3.13 定义 设 (X,τ) 与 (Y,τ_Y) 是两个拓扑空间，$F: X \to Y$ 是一满射且满足条件式(33)，则称 F 为**商映射**，且称 Y 为 X 的**商空间**.

由定理 2.3.12 及其后的说明，将 Y 称作 X 的商空间是合理的，尽管从形式上看与定义 2.3.9 有一点歧义.

现在的问题是如何判定一个满射为商映射. 遗憾的是, 除了定义本身之外, 对于商映射并无便于应用的等价刻画(例如类似于定理2.2.3那样的结果). 不过, 如下命题所给出的充分条件还是很管用的.

2.3.14 命题 设 (X,τ) 与 (Y,τ_Y) 是两个拓扑空间, $F: X\to Y$, 则当以下条件之一满足时 F 为商映射:

(i) F 是连续开满射;

(ii) F 是连续闭满射.

证 由 F 连续推出 $F^{-1}\tau_Y\subset\tau$. 要验证条件(33), 只要对满足 $F^{-1}B\in\tau$ 的 $B\subset Y$ 证明 $B\in\tau_Y$. 若条件(i)满足, 则直接有 $B=FF^{-1}B\in\tau_Y$. 若条件(ii)满足, 则

$$B^c=FF^{-1}B^c=F(F^{-1}B)^c$$

是 Y 中的闭集, 因而 $B\in\tau_Y$. □

结合定理2.3.12与命题2.3.14, 可得到许多我们所期待的结果.

2.3.15 例 (i) 设 X 是拓扑空间 $X_i(i\in I)$ 的积空间, 则投影 $P_i: X\to X_i$ 是连续开满射(依命题2.3.7(iii)), 因而是商映射(用命题2.3.14(i)). 于是, 每个"因子空间" X_i 都是积空间 X 的商空间. 这样, "积"与"商"在字面上的互逆关系就获得了准确的拓扑学涵义, 这确实是令人欣慰的.

(ii) 设 $J=[0,1]$ (下同), S^1 依式(21). 定义

$$F: J\to S^1,\quad x\to e^{2\pi ix},\tag{34}$$

则 F 显然是一连续满射. 其次可验证 F 为闭映射(直接验证并不难, 但我们不去做这件事, 因由第三章的命题3.2.5知道, 这是 J 的紧性的一个简单推论), 因而 F 是商映射. 因

$$\begin{aligned}Fx=Fy&\Leftrightarrow e^{2\pi ix}=e^{2\pi iy}\\&\Leftrightarrow |x-y|=0\text{ 或 }1\quad(x,y\in J),\end{aligned}$$

故若定义 $x\sim y\Leftrightarrow Fx=Fy$, 则 $\tilde{J}$ 恰如空间式(28). 于是由定理2.3.12得出, 作为 J 的商空间, $\tilde{J}$ 可等同于 S^1, 恰如我们所预期的.

(iii) 类似于映射(34), 定义

$$F: J\times J\to S^1\times J,\quad (x,y)\to(e^{2\pi ix},y),\tag{35}$$

则 F 亦为连续闭满射(其为闭映射的理由同样依命题3.2.5), 因而为商映射. 在 $X=J\times J$ 中定义

$$\begin{aligned}(x,y)\sim(x',y')&\Leftrightarrow F(x,y)=F(x',y')\\&\Leftrightarrow(e^{2\pi ix},y)=(e^{2\pi ix'},y')\\&\Leftrightarrow|x-x'|=0\text{ 或 }1, y=y',\end{aligned}$$

则 $\tilde{X}$ 恰如空间式(29). 于是又得到所期待的结论: $\tilde{X}$ 原来就是圆柱面 $S^1\times J$.

(iv) 仍设 $X=J\times J$, 类似于映射(35)定义

$$F: X \to S^1 \times S^1, \quad (x,y) \to (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}),$$
$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow F(x,y) = F(x',y'),$$

则 F 是连续闭映射，$\widetilde{X}$ 即为空间式(30)，因而 $\widetilde{X}$ 可看做环面 $S^1 \times S^1$.

2.4 拓扑性质

在2.3C 中，我们说到 X 的商空间 $\widetilde{X}$ 可等同于某个拓扑空间 Y（参看定理2.3.12及其后的说明），这自然意味着空间 $\widetilde{X}$ 与 Y 有相同的拓扑性质. 然而，何谓拓扑性质，却尚未严格界定，这正是本节要考虑的. 在一般的意义上，拓扑学正是以探讨拓扑空间的拓扑性质为其任务. 在研究拓扑性质的过程中所积累的经验，已凝结成若干基本原则，这些原则从根本上影响到拓扑学问题的提法及其理论形式. 在本书内容向更深入的层次展开之前，初步了解这些一般原则的思想及相应的用语，无疑是有益的.

毫无疑问，在所接触的具体材料还十分有限的情况下，你不可能对一般原则达到很深入的理解. 因此，对于本节中那些带有方法论性质的一般评述，在初读时只要略知其梗概就够了，真正的理解必然要待了解到较多的拓扑性质之后. 本节中对于"可数性"与"可分性"的讨论，自然也能部分地起到阐释一般方法的作用.

以下 X, Y, Z 等均记拓扑空间，记号 $\tau_X, \tau_Y, \mathscr{F}_X, \mathscr{F}_Y$ 等的意义是自明的.

A. 同胚

2.3C 中的讨论已显示出如下定义的必要性.

2.4.1 定义 设 X 与 Y 是两个拓扑空间. 若 $F: X \to Y$ 是一个连续双射且有连续的逆映射，则称 F 为从 X 到 Y 的一个**同胚**，或简称 F 为同胚（也称为拓扑映射或拓扑变换）. 当从 X 到 Y 的同胚存在时（未必是唯一的），X 与 Y 是互相同胚或拓扑等价的拓扑空间，或简单地说，X 与 Y 同胚.

今后用 $F: X \cong Y$ 表示 F 是从 X 到 Y 的一个同胚，而 $X \cong Y$ 则表示 X 与 Y 同胚，除非另有说明. 利用上述记号，现在可将定理2.3.12 的结论简单地表示为 $G: \widetilde{X} \cong Y$.

一个与同胚有关但稍弱的概念是拓扑嵌入. 设 $F: X \to Y, FX = Z, Z$ 是 Y 的子空间. 若 $F: X \cong Z$，则称 F 为从 X 到 Y 中的一个**拓扑嵌入**；当这样一个拓扑嵌入存在时，说 X 可拓扑嵌入到 Y 中，此时不妨将 X 看做 Y 的子空间（参看下面的例2.4.4(ii)）.

由定义2.4.1 直接看出，同胚有以下性质.

(i) 自反性：对任何拓扑空间 X，有 $1_X: X \cong X$.

(ii) 对称性：若 $F: X \cong Y$，则 $F^{-1}: Y \cong X$.

(iii) 传递性:若 $F:X\cong Y, G:Y\cong Z$, 则 $GF:X\cong Z$.

因此可以说,互相同胚的拓扑空间组成一个**同胚等价类**①,不同类的拓扑空间必不同胚.

让我们综合一下对同胚的各种形式的刻画.

2.4.2 命题 设 $F:X\to Y$ 是一个双射,则以下条件互相等价:

(i) F 是一个同胚;

(ii) F 是连续开映射 ($\Leftrightarrow F\tau_X=\tau_Y$);

(iii) F 是连续闭映射 ($\Leftrightarrow F\mathscr{F}_X=\mathscr{F}_Y$);

(iv) $F\mathscr{N}_x=\mathscr{N}_{Fx}(\forall\, x\in X)$;

(v) 对 X 中的网 $\{x_t\}$ 及 $x\in X$, 有 $x_t\to x\Leftrightarrow Fx_t\to Fx$;

(vi) $\forall\, A\subset X$, 有 $F\overline{A}=\overline{FA}(\Leftrightarrow\forall\, A\subset X$,有 $FA^\circ=(FA)^\circ)$.

以上结论无非是命题2.2.2,2.2.3,2.2.8,2.2.10的一个综合,并无必要重新逐一推导.简而言之,命题2.4.2表明,同胚 $F:X\to Y$ 实现 X 与 Y 中的开集、闭集、邻域、极限、闭包、内部之间的完全对应;如果某个概念或结论在其表述中仅用到上面列举的开集、闭集、邻域等概念,那么它在同胚 F 之下也是完全对应的.例如,若 X 是可数个开集的不交并, $F:X\cong Y$, 则 Y 也必为可数个开集的不交并.总之,通过同胚 $F:X\to Y$, 我们可以毫无保留地将 X 中的种种拓扑事实转移到 Y 中去.

由命题2.4.2直接推出关于拓扑嵌入的以下结论.

2.4.3 推论 设 $F:X\to Y$ 是一个单射,则以下结论成立.

(i) F 是拓扑嵌入的充要条件是:对于 X 中的网 $\{x_t\}$ 及 $x\in X$, 有

$$x_t\to x\Leftrightarrow Fx_t\to Fx.$$

(ii) 若 FX 是 Y 的开子集(或闭子集), F 是连续开映射(或连续闭映射),则 F 是拓扑嵌入.

今后需要判定一映射为拓扑嵌入时,推论2.4.3(尤其是其中的结论(i))是常用的.

现在来看几个例子.

2.4.4 例 (i) 设 X,Y,Z 是三个拓扑空间,今证明

$$X\times Y\times Z\cong(X\times Y)\times Z. \tag{1}$$

为此,定义映射

$$F:X\times Y\times Z\to(X\times Y)\times Z,\quad (x,y,z)\to((x,y),z).$$

F 显然为双射.若 $\{x_t\},\{y_t\},\{z_t\}$ 分别为 X,Y,Z 中的网, $x\in X, y\in Y, z\in Z$, 则

① 此处套用了一集依等价关系分类的术语,但我们避免使用"对拓扑空间的全体进行分类"这样的说法,以免遇到集论困难.

$$\begin{aligned}(x_t,y_t,z_t) &\to (x,y,z)\\ \Leftrightarrow x_t &\to x, y_t \to y, z_t \to z\\ \Leftrightarrow (x_t,y_t) &\to (x,y), z_t \to z\\ \Leftrightarrow F(x_t,y_t,z_t) &\to F(x,y,z),\end{aligned}$$

这表明 F 是一个同胚(用命题 2.4.2(v)).

当需要验证一个映射 F 为同胚时,可选择命题 2.4.2(ii)~(vi)中任一条件验证之. 验证条件(v)常常是方便的,上面对 F 的验证已表明了这一点.

式(1)表明拓扑积满足结合律,这一结论将经常用到. 还可将此结论推广到很一般的情况:设 $X_i(i\in I)$ 是一族拓扑空间,$I=\bigcup I_k$ 是一个不交并,则有

$$\prod_{i\in I} X_i \cong \prod_k \prod_{i\in I_k} X_i. \tag{2}$$

特别地,若 $I\cap J=\varnothing$,则

$$X^{I\cup J}\cong X^I\times X^J. \tag{3}$$

这些结论今后将不加说明地引用.

(ii) 设 X 是拓扑空间 $X_i(i\in I)$ 的积空间,则每个 X_i 可看作 X 的子空间. 今就一特殊情况证明此结论(这只是为了便于表述,处理一般情况并无原则性困难). 设 $Z=X\times Y$,取定 $y_0\in Y$,定义映射

$$F: X\to Z,\quad x\to (x,y_0),$$

则 F 显然是一单射. 若 $\{x_t\}$ 是 X 中的网,$x\in X$,则

$$\begin{aligned}x_t\to x &\Leftrightarrow (x_t,y_0)\to (x,y_0)\\ &\Leftrightarrow Fx_t\to Fx,\end{aligned}$$

可见 F 是一拓扑嵌入(用推论 2.4.3(i)).

(iii) 设 $\mathbf{R}^\omega$ 依例 2.1.6(也参看例 2.3.8(ii)),则由式(3)有

$$\mathbf{R}^\omega\cong \mathbf{R}^n\times \mathbf{R}^J,$$

其中 $J=\mathbf{N}\setminus\{1,2,\cdots,n\}$. 于是由(ii)得出结论:$\mathbf{R}^n$ 可看作 $\mathbf{R}^\omega$ 的子空间,即 $\mathbf{R}^n$ 可拓扑嵌入 $\mathbf{R}^\omega$ 中. 这就说明了 $\mathbf{R}^\omega$ 真正是Euclid 空间的一个"扩大".

B. 拓扑性质

上面对同胚的讨论,自然地导致关于拓扑性质的一般概念. 如命题 2.4.2 所指明的,拓扑空间中由开集、邻域等描述的种种关系,在同胚映射之下保持不变. 这些不变的关系正是拓扑学所致力研究的拓扑性质. 正式地说,所谓拓扑性质,就是拓扑空间的在同胚映射下保持不变的性质. 在这个意义上,拓扑性质也称为同胚不变性质,或拓扑不变性质,或**拓扑不变量**①.

---

① 自然包括那些在拓扑映射之下保持不变的数量指标与对应于拓扑空间的代数系统,但亦可指一般拓扑性质.

对拓扑性质的如上界定引出如下两方面的考虑.

首先,既然拓扑性质是同胚不变性质,互相同胚的拓扑空间就具有完全同样的拓扑性质,或者说,有实质上相同的拓扑结构,所不同的仅是外观形式而已.在这个意义上,当$X \cong Y$时,X与Y作为拓扑空间就不必加以区别,有时就干脆认定$X=Y$!由此又自然地引出如下观点:若X可拓扑嵌入Y,则不妨认为X就是Y的子空间,有时就干脆认定$X \subset Y$.对于我们所要考察的某个拓扑性质P,既然P为互相同胚的拓扑空间组成的空间类所共有,我们就无需考虑该空间类的所有空间,而仅需考察其中的某个特殊代表就够了.互相同胚的拓扑空间,在本质上固然没有区别,但就其形态的直观性与研究的方便性而言,则可能大有区别.互相同胚的拓扑空间适当替换,常常可以显著地简化所研究的问题.从方法论的角度来看,同胚概念的主要价值正在于此.

其次,如命题2.4.2所表明的,同胚实现两个拓扑空间的开集、邻域等之间的完全对应.这就引出如下基本结论:如果关于拓扑空间的某个命题P的表述仅用到开集、闭集、邻域、极限、闭包、内部等概念以及集论的用语(如集运算、可数性等),那么P就是一条**拓扑命题**,或等价地,P所刻画的空间性质就是拓扑性质.这就使我们对于拓扑性质的外部特征有了一个可识别的标准.

在作了上面的说明之后,现在已经很清楚,拓扑学所要研究的,就是拓扑性质,而不是某个特定的拓扑空间①.

就对拓扑性质的研究而言,我们所要解决的基本问题是什么呢?在这一点上,人们已形成某些一般看法,最基本的问题可概括如下.

(i) **等价刻画**.给定一个拓扑性质P,对于它有哪些等价刻画?对于P所能给出的等价刻画愈多,对P的理解就愈透彻;对P的刻画在形式上差别愈大,所得的结论就愈深刻、愈有应用价值.对一些重要拓扑性质的非同寻常的等价刻画的发现,常常是拓扑学中的重要成果.

(ii) **不变性**.给定拓扑性质P,它在空间的一定运算或变换下是否保持不变?具体来说就是:具有性质P的拓扑空间的子空间(或开子空间、闭子空间)是否亦具有性质P?用一个已流行的术语来说就是:P是否是**遗传**(**或开遗传**、**闭遗传**)的?任意个(或有限个、可数个)具有性质P的拓扑空间的积空间是否亦具有性质P?或形式地说,P是否是**可乘**(**或有限可乘**、**可数可乘**)的?具有性质P的拓扑空间在连续映射下的像是否亦具有性质P?或者说,性质P是否为连续映射所保持?具有性质P的拓扑空间的商空间是否亦具有性质P?对以上问题的解答愈肯定,为我们所知的具有性质P的拓扑空间就愈多,对于性质P的应用就获得愈多的机会.一个拓扑性质的不变性(例如遗传性、可乘性、在连续映射

---

① 在这个意义可以说,拓扑学家乃是"不知土豆与铅球有何区别的人".

下的不变性等)结论愈多,该性质的运用就愈方便. 某些不变性结论(如可乘性定理等)常常是深刻的拓扑学定理.

(iii) **逻辑关系**. 给定拓扑性质 P 与 Q, 是否存在确定的关系 $P \Rightarrow Q$ 或 $Q \Rightarrow P$? 如果 $P \Rightarrow Q$ 一般地不成立, 是否有适当的条件附加于 P, 使之能推出 Q?

拓扑空间理论的相当一部分内容就是关于以上问题的解答;肯定的解答依赖于或易或难的证明,否定的解答则依赖于适当的反例.

然而,就目前而言,对上述的这一切你或许并无太多感觉,因为我们还没有真正考察过某个特定的、仅为部分拓扑空间所具有的拓扑性质. 现在该有一个开端了,这就是下面要谈到的"可数性"与"可分性",看过它们之后,再回过头来重温本段所说的一切,自然会有更多的体会.

C. 可数性公理

在 2.1A 中我们曾提到,选择拓扑 τ 的某个较小的子族 $\mathscr{B}$ 作为拓扑基,可收到"用特殊对象表出一般对象",或者"用简单对象表出复杂对象"的效果. 选择拓扑基时首要的标准是,它应含有尽可能少的集. 就常见的拓扑空间而言,选取有限的拓扑基并无现实性,因而不成为探讨的目标. 至于选取可数的拓扑基,则对一大类拓扑空间是现实可行的,且这些空间构成最有应用价值的拓扑空间的一部分.

对于邻域基亦可提出类似的问题. 这两方面的考虑导出互相平行的以下两个概念.

2.4.5 定义 若拓扑空间 X 存在可数拓扑基(即由可数个集组成的拓扑基),则说 X 满足**第二可数性公理**. 若 X 的每点存在可数邻域基,则说 X 满足**第一可数性公理**.

为行文简便起见,今后将采用较简短的术语:满足第一(或第二)可数性公理的空间就称为**第一(或第二)可数空间**;"满足第一或第二可数性公理"这种性质,统称为"可数性". 后一术语虽不很标准,但适当地使用不致引起混淆. 依据上段中的一般说明,"可数性"无疑是拓扑性质.

要举出第一或第二可数空间的例子并不难. 最容易想到的第一可数空间是度量空间:若 X 是度量空间, $x \in X$, 则 $\{B_{1/n}(x) : n \in \mathbf{N}\}$ 就是 x 的一个可数邻域基. $\mathbf{R}^n$ 可作为第二可数空间的简单例子,它有一个可数拓扑基:

$$\{B_r(x) : x \in \mathbf{Q}^n, 0 < r \in \mathbf{Q}\}.$$

现在对第一与第二可数空间来逐个解答上段中提出的那些问题. 首先指出如下平凡结论:第二可数性 $\Rightarrow$ 第一可数性. 事实上,若$\mathscr{B}$ 是 X 的可数拓扑基,则对每个 $x \in X$,

$$\mathscr{B}_x = \{B \in \mathscr{B} : x \in B\}$$

是 x 的可数邻域基(参考2.1B).

2.4.6 定理　对于拓扑空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是第二可数空间；

(ii) X 的任何拓扑基包含一个可数拓扑基；

(iii) X 有一个可数拓扑子基.

证　(i)⇒(ii). 这是证明的核心步骤. 设 $\mathscr{A}=\{A_n\}$ 与 $\mathscr{B}$ 均为 X 的拓扑基，今要从 $\mathscr{B}$ 中取出 X 的一个可数拓扑基. 令

$$I=\{(m,n): A_m\subset B\subset A_n(\exists\, B\in\mathscr{B})\},$$

则 I 作为 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的子集是可数集(用定理1.1.8). 对每个 $i=(m,n)\in I$，取定一个 $B_i\in\mathscr{B}$，使得 $A_m\subset B_i\subset A_n$. 今证

$$\mathscr{B}_I\triangleq\{B_i: i\in I\}$$

是 X 的可数拓扑基. 为此，只要证每个 $A_n(n\in\mathbf{N})$ 是 $\mathscr{B}_I$ 中某些集之并. 固定 $n\in\mathbf{N}$，任给 $x\in A_n$. 因 $\mathscr{B}$ 是 X 的拓扑基，故有 $B\in\mathscr{B}$，使得 $x\in B\subset A_n$；同理又有 $A_m\in\mathscr{A}$，使得 $x\in A_m\subset B$. 于是 $i=(m,n)\in I, x\in B_i\subset A_n$. 这就推出 A_n 是 $\mathscr{B}_I$ 中某些集之并，如所要证.

(ii)⇒(iii)是平凡的.

(iii)⇒(i). 若 X 有可数拓扑子基 $\mathscr{B}$，则 $\mathscr{B}^*$ 是 X 的拓扑基且是可数的(用定理1.1.8)，因而 X 是第二可数空间.　□

定理2.4.6中的关键刻画是(ii)，今后将多次用到.

对于第一可数性亦可建立类似的结果，但有了定理2.4.6之后，就不特别值得关注了.

关于“不变性”，有如下颇令人满意的结果.

2.4.7 定理　(i) 第二可数性是遗传的，即第二可数空间的子空间亦为第二可数空间.

(ii) 设 X 是一族拓扑空间 $(X_i,\tau_i)(i\in I)$ 的积空间，则 X 是第二可数空间⇔每个 X_i 是第二可数空间，且至多除去可数多个例外，τ_i 是平凡拓扑(依例2.1.2(iii)). 因此，第二可数性是可数可乘的.

(iii) 第二可数性在连续开映射下不变，即若 $F: X\to Y$ 是一连续开满射，X 是第二可数空间，则 Y 亦是第二可数空间.

对于第一可数性有完全平行的结论.

证　结论(i)与(iii)分别由命题2.3.2(i)与推论2.2.10(ii)直接推出，只需证(ii).

首先设 X 是第二可数空间，则 $X_i(i\in I)$ 作为 X 的子空间(依例2.4.4(ii))亦是第二可数空间. 若具有非平凡拓扑的 X_i 超过可数个，则不妨设 I 不可数而 $X_i(i\in I)$ 均具有非平凡拓扑，今要由此推出矛盾. 设 $\mathscr{B}=\{B_n\}$ 是 X 的可数拓

扑基. $\forall i \in I$, 取 $A_i \in \tau_i$, 使得$\varnothing \neq A_i \neq X_i$. 对固定的 $n \in \mathbf{N}$, 因 B_n 包含一个形如2.3节式(11)′的非空开集,故除至多有限个例外,有 $P_iB_n = X_i$. 因 I 不可数,故必有 $i_0 \in I$, 使得 $\forall n \in \mathbf{N}$, 有 $P_{i_0}B_n = X_{i_0}$. 另一方面,因 $P_{i_0}^{-1}A_{i_0}$ 是 X 中的非空开集,故有 $n \in \mathbf{N}$, 使得 $B_n \subset P_{i_0}^{-1}A_{i_0}$, 因而

$$X_{i_0} = P_{i_0}B_n \subset P_{i_0}P_{i_0}^{-1}A_{i_0} = A_{i_0} \neq X_{i_0},$$

得出矛盾.

其次,设 X_i 均为第二可数空间,且除至多可数多个例外, τ_i 是平凡拓扑. 今证 X 是第二可数空间. 因任意个平凡拓扑空间的积空间显然是平凡拓扑空间,从而是第二可数空间,故不妨设 I 就是可数集(此处用到式(2),为什么?). $\forall i \in I$, 取 X_i 的可数拓扑基 $\mathscr{B}_i$, 则 $\mathscr{B} \triangleq \bigcup P_i^{-1}\mathscr{B}_i$ 是 X 的拓扑子基(用命题2.3.7(i)),且$\mathscr{B}$ 显然是可数族(用定理1.1.8),因而 X 是第二可数空间(用定理2.4.6).

对于第一可数性相应结论的证明是类似的. □

利用定理2.4.7来判定第一或第二可数性是很有效的.

2.4.8 例 (i) 空间 $\mathbf{R}^\Omega$ (参考例2.3.8(ii)). 首先注意, $\mathbf{R}$ 平凡地是第二可数的(例如 $\{(a,b): a,b \in \mathbf{Q}\}$即为 $\mathbf{R}$ 的可数拓扑基). 于是由定理2.4.7(ii)推出:

$$\mathbf{R}^\Omega \text{ 是第二(或第一)可数空间} \Leftrightarrow \Omega \text{ 可数}.$$

特别地,由此又重新推出 $\mathbf{R}^n$ 是第二可数空间. 鉴于 $\mathbf{R}^\omega$ 及其子空间均为第二可数空间,使我们一下子得到大量第二可数空间的例子.

若 Ω 不可数,则 $\mathbf{R}^\Omega$ (例如 $\mathbf{R}^\mathbf{R}$)不是第一可数空间,因而其中的拓扑绝非度量拓扑,这意味着不可能在 $\mathbf{R}^\Omega$ 上定义一个度量,使之能生成 $\mathbf{R}^\Omega$ 上的积拓扑(即点态收敛拓扑). 这是一个颇有意思的结果,它可看作第一个成功的例子,说明运用拓扑性质的不变性与逻辑关系,可得出某个空间具有或不具有某个拓扑性质的结论,而直接证明该结论则未必容易.

(ii) 设 X 是任一非空集,其中采用离散拓扑(依例2.1.2(iii)). X 的任何拓扑基必定包含单点集族 $\{\{x\}: x \in X\}$. 这就表明, X 是第二可数空间 $\Leftrightarrow X$ 是可数集. 因此,当 X 是不可数集时, X 依离散拓扑不是第二可数的;因而度量空间不必是第二可数的(参考2.1D);这又推出第一可数空间不必是第二可数的.

第一可数空间的价值主要因为以下结果.

2.4.9 命题 设 X 是第一可数空间,则以下结论成立:

(i) 任给 $A \subset X$, 有

$$\overline{A} = \{x \in X: \text{ 存在序列}\{x_n\} \subset A \text{ 使 } x_n \to x\}. \tag{4}$$

(ii) 设 $F: X \to Y$, Y 是任一拓扑空间,则 F 连续的充要条件为

$$x_n \to x(\text{序列收敛}) \Rightarrow Fx_n \to Fx. \tag{5}$$

证 (i) 以 B 记式(4)之右端,则显然 $B \subset \overline{A}$ (用2.1节式(20)). 反之,设

$x \in \overline{A}$，取 x 的可数邻域基 $\{V_n\}$，不妨设 $\{V_n\}$ 是一降列(否则用 $\bigcap_1^n V_i$ 取代 V_n)．$\forall n \in \mathbf{N}$，取 $x_n \in A \cap V_n$(用定义2.1.11及其后的说明)，则 $\{x_n\} \subset A$，$x_n \to x$，因而 $x \in B$．这就证得 $\overline{A} = B$，即式(4)成立．

(ii) 当 F 连续时条件(5)显然成立(用命题2.2.2(iv))．反之，设条件(5)成立，$A \subset X$，今证 $F\overline{A} \subset \overline{FA}$(这推出 F 连续，参看定理2.2.3(vi))．任给 $x \in \overline{A}$，由式(4)有序列 $\{x_n\} \subset A$，使得 $x_n \to x$；由条件(5)得 $Fx_n \to Fx$，因而 $Fx \in \overline{FA}$．这表明 $F\overline{A} \subset \overline{FA}$． □

简单地说，命题2.4.9表明，对于第一可数空间，凡用网收敛表述的概念或命题，均可改用序列收敛表述，这就可给问题带来显著简化．就此而言，第一可数空间颇接近于度量空间．你必定注意到，式(4)正好与2.1节式(32)一致．因此，第一可数空间必定是你更喜欢的拓扑空间．毕竟使用序列极限是比使用网极限更方便的事情．至于非第一可数空间，仅用序列不足以刻画其拓扑，理由现在已十分清楚：这种空间中点的邻域系取决于不可数个基邻域，而一个序列至多含可数多个点！

D. 可分性

如果说，拓扑基概念提供了用某些特殊开集通过并运算构成全部开集的方法，那么自然会提出这样的问题：是否可用拓扑空间的某个特殊子集通过极限运算得出空间中所有的点？就Euclid空间 $\mathbf{R}^n$ 而言，我们知道其中的有理点集 $\mathbf{Q}^n$ 就能起这样的作用．我们希望，还有其他一些拓扑空间会有类似的性质．为使上面提出的问题表述得更清楚，引进如下定义．

2.4.10 定义 若 A 是拓扑空间 X 的子集，$\overline{A} = X$，则称 A 为 X 中的**稠集**，或者说 A 在 X 中**稠密**．若 X 中存在可数稠集，则称 X 为**可分空间**．

依以上定义，$\mathbf{Q}^n$ 就是 $\mathbf{R}^n$ 中的可数稠集，因而 $\mathbf{R}^n$ 是可分空间．我们将看到，还有许多其他常见的拓扑空间是可分空间．

在详细讨论可分性之前，让我们给出稠集的一些更明确的刻画．

2.4.11 命题 对于 $A \subset X$，以下条件互相等价：

(i) A 是 X 中的稠集；

(ii) X 的每个非空开子集都含有 A 中的点；

(iii) 存在 X 的拓扑基 $\mathscr{B}$，每个 $B \in \mathscr{B}$ 都与 A 相交；

(iv) 每点 $x \in X$ 的每个邻域(或基邻域)都含有 A 中的点；

(v) 每点 $x \in X$ 是 A 中某个网的极限．

证明是平凡的．实际上，以上诸条件不过是2.1节式(11)与2.1节式(20)的直接推论，至多换个说法而已．命题2.4.11虽然简单，但因其用得很多，还是值得注意的．应注意的是，命题2.4.11(v)中的网不能改为序列，除非 X 是第一可数空间．

直观地说,命题2.4.11中的诸条件都表明一个事实:X中每一点都可用A中的点任意逼近.当然,此处所说的"逼近",未必有度量上的意义,除非X是度量空间.因此,在一定意义上,稠集起着类似于拓扑基的作用,二者都是用特殊的对象来表出或构成一般的对象,以达到简化的效果.拓扑空间X中的问题,如果能首先在某个稠集A上获得解决,然后通过一个极限手续过渡到全空间,那么就可能实现问题的简化;集A愈"小",其中的元素愈特殊,简化的效果就可能愈好.这就促使我们寻求尽可能"小"的稠集,可数稠集自然已是"最小"的稠集了,而有这种稠集的空间就是可分空间.因此,可分空间特别被人们偏爱,是理所当然的.

从上面已指出的稠集与拓扑基的对比关系看来,可分性与第二可数性有某种类似性.然而,可分性与第二可数性的确切关系是什么呢?以下结果提供了部分回答.

2.4.12 命题 第二可数空间是可分空间;可分度量空间是第二可数空间.因此,就度量空间而言,可分性与第二可数性一致.

证 首先设X是第二可数空间,于是它有一可数拓扑基$\{B_n\}$. $\forall n \in \mathbf{N}$,取$x_n \in B_n$,令$A = \{x_n\}$.因每个基开集B_n均含有A中的点,故$\overline{A} = X$,这表明X是可分的.

其次设X是可分度量空间,于是它有一可数稠集$\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$.令

$$\mathscr{B} = \{B_{1/m}(x_n) : m, n \in \mathbf{N}\},$$

显然$\mathscr{B}$是一可数开集族(用定理1.1.8).今证$\mathscr{B}$是X的拓扑基.为此只要证:任给X中的球$B_r(x)$,$x \in X$,$r > 0$,总有$B_{1/m}(x_n) \in \mathscr{B}$,使得$x \in B_{1/m}(x_n) \subset B_r(x)$.首先取$m \in \mathbf{N}$,使$1/m < r/2$;然后取$x_n \in B_{1/m}(x)$(用$\{x_n\}$的稠密性).$\forall y \in B_{1/m}(x_n)$,有

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leqslant d(x,x_n) + d(x_n,y) \\ &\leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{m} < r, \end{aligned}$$

即$y \in B_r(x)$.因此$x \in B_{1/m}(x_n) \subset B_r(x)$,如所要证. □

下面考虑不变性.尽管可分性与第二可数性颇为接近,但以下结果与定理2.4.7还是有较大差别.

2.4.13 定理 (i) 可分空间的开子空间是可分的;可分度量空间的任何子空间是可分的.

(ii) 不超过$c(c = |\mathbf{R}|)$个可分空间的积空间是可分的.

(iii) 可分性在连续映射下不变,即若$F \in C(X,Y)$,X是可分空间,则FX是Y的可分子空间.

定理的结论(i)与(iii)的证明是平凡的,读者不难自己写出.(ii)的证明涉及

一点基数计算，不宜在此考虑．不过，我们将在例子（见例2.4.14(iv)）中考虑(ii)的一种特殊情况，对这一特殊情况的处理实际上已体现了证明的一般思想．

2.4.14 例 (i) 设 τ_w 与 τ_s 分别为 X 上的平凡拓扑与离散拓扑．(X,τ_w) 仅有开集 X, $\varnothing$，当然是第二可数的，因而也是可分的．注意，任给 $x \in X$，单点集 $\{x\}$ 已在 (X,τ_w) 中稠密！因 (X,τ_s) 可看作度量空间（依例2.1.15(ii)），故 (X,τ_s) 可分 $\Leftrightarrow(X,\tau_s)$ 是第二可数的．在例2.4.8(ii)中已说明，(X,τ_s) 是第二可数空间 $\Leftrightarrow X$ 可数，因此 (X,τ_s) 可分 $\Leftrightarrow X$ 可数．因 (X,τ_s) 中每个单点集 $\{x\}$ 是开集，故 (X,τ_s) 中的唯一稠集就是 X 本身（用命题2.4.11(ii)）．

(ii) 设在 $\mathbf{R}$ 中采用上拓扑 τ_u（依例2.1.2(ii)），则 $\mathbf{R}$ 中的闭集族是（参看例2.1.13(ii)）

$$\mathscr{F} = \{\mathbf{R},\varnothing\} \cup \{[a,\infty) : a \in \mathbf{R}\}.$$

设 $A \subset \mathbf{R}$, $\inf A = -\infty$，则 $\mathbf{R}$ 中包含 A 的唯一闭集就是 $\mathbf{R}$，因而 $\overline{A} = \mathbf{R}$，即 A 是稠集．特别地

$$A = \{-1, -2, \cdots, -n, \cdots\}$$

在 $\mathbf{R}$ 中稠密，因而 $(\mathbf{R},\tau_u)$ 是可分的．

(iii) 设 X 是任一不可数集，其中采用可数补拓扑 τ（依例2.1.13(v)）．任给可数集 $A \subset X$，因 A 为闭集，故 $\overline{A} = A \neq X$, A 必非稠集，因而 X 不是可分的．另一方面，若 $A \subset X$ 是不可数集，则如例2.1.13(v)中已指明的，有 $\overline{A} = X$．因此，X 中的稠集就是不可数集．

以上三例中的稠集与 $\mathbf{R}$（依通常拓扑）中的稠集（如有理点集）差别之大，颇令人惊异．

(iv) 设 $X = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$，其中采用积拓扑．由例2.3.8(ii)，$X$ 由形如

$$U = \{f \in X : f(x_i) \in \delta_i (1 \leqslant i \leqslant n)\} \quad (\text{用 2.3 节式(17)}) \tag{6}$$

的集组成拓扑基，其中 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\} \subset \mathbf{R}$ 为有限集，$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$ 是开区间．以 $\mathscr{A}$ 记如下有理点组 A 之全体：

$$\begin{cases} A = \{r_i,s_i,t_i \in \mathbf{Q} : 1 \leqslant i \leqslant n\}, \\ r_1 < s_1 < r_2 < \cdots < r_n < s_n, \end{cases} \tag{7}$$

则 $\mathscr{A}$ 是可数集（用定理1.1.8）．对如式(7)的 A，定义

$$f_A(x) = \begin{cases} t_i, & r_i < x < s_i, 1 \leqslant i \leqslant n; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

则 $F = \{f_A : A \in \mathscr{A}\}$ 是 X 的一个可数子集．设 U 如式(6)，不妨设 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，于是必有如式(7)中的有理数 r_i, s_i，使得 $r_i < x_i < s_i (1 \leqslant i \leqslant n)$．其次取 $t_i \in \delta_i \cap \mathbf{Q} (1 \leqslant i \leqslant n)$，则

$$f_A(x_i) = t_i \in \delta_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

这表明 $f_A \in U$．因此，F 是 X 中的稠集（用命题2.4.11(iii)），从而 X 为可分空

间.

上述的 X 就是一个非第二可数的可分空间的例子. 考虑到可分空间可由一可数集通过极限运算扩张而成,似乎可分空间不会"太大". 而 $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ 无疑是一个"很大"的空间,其可分性似乎难以理解. 这就要注意到 $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ 中使用了很弱的拓扑,尽管集 $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ 很大,但其中的开集还不至于太多,因而使命题2.4.11中的条件(ii)可被一可数集满足. 如我们已指出的那样(参看例2.2.5(i)),拓扑愈弱,一集的闭包就愈大,因而空间就愈可能成为可分空间. 前面你已看到,任何平凡拓扑空间都是可分的!

另外注意,既然 $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ 是非第二可数的可分空间,那么其中的拓扑必非度量拓扑(用命题2.4.12). 这就重新得出例2.4.8(i)已提到的结论(取 $\Omega = \mathbf{R}$).

E. 同伦

在讨论了两种基本而重要的拓扑性质之后,让我们再回到关于拓扑性质的一般考察. 前面已经提到,拓扑性质是同胚不变量. 因此,一个拓扑性质与其说属于某个空间,还不如说属于互相同胚的一整类空间. 为具体考察的方便,只要在该类空间中选择最合适的代表就够了;空间类越大,选择到理想代表的可能性就越大. 这就启示出一个更一般的思想:若能在拓扑空间之间界定一种比同胚等价更宽泛的等价,姑且记作 $\simeq$,使之满足条件:

(i) 自反性: $X \simeq X$;

(ii) 对称性: $X \simeq Y \Leftrightarrow Y \simeq X$;

(iii) 传递性: $X \simeq Y \simeq Z \Rightarrow X \simeq Z$;

(iv) 弱于同胚: $X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$ (以上 X,Y,Z 是拓扑空间).

则 $\simeq$ 等价的空间类比同胚等价类更大. 若拓扑空间的某个性质 P 关于 $\simeq$ 等价不变,则当 P 属于某个拓扑空间 X 时,亦必属于包含 X 的整个 $\simeq$ 等价类,当然也属于该等价类所包含的同胚等价类,因而是拓扑性质,而且是一种比同胚不变性质更特殊的拓扑性质. 为研究性质 P, 只需从 P 所属的 $\simeq$ 等价类中挑选某个代表加以研究就够了;因 $\simeq$ 等价类更大,我们更有可能挑选到高度特殊的空间,从而可能使对 P 的研究归结到很特殊的情况,以达到最大的简化. 如果上述设想得以实现,就为拓扑学开辟了新的简化途径. 下面引入的同伦等价,正是为达此目的而设的.

以下设 $J = [0,1]$; 对于 $H \in C(J \times X, Y)$, 记 $H_t = H(t, \cdot)(t \in J)$.

2.4.15 定义　设 X 与 Y 是两个拓扑空间.

(i) 设 $f_0, f_1 \in C(X,Y)$. 若存在 $H \in C(J \times X, Y)$, 使得 $f_i = H_i, i = 0,1$, 则说 f_0 与 f_1 **同伦**,记作 $f_0 \simeq f_1$, 并称 H 为从 f_0 到 f_1 的一个同伦或同伦映射,也写作 $H : f_0 \simeq f_1$. 若 f_0 与某个常值映射同伦,则说 f_0 是**零伦的**,写作 $f_0 \simeq 0$.

(ii) 若存在 $f \in C(X,Y)$ 与 $g \in C(Y,X)$, 使得

$$gf \simeq 1_X, \quad fg \simeq 1_Y, \tag{8}$$

则说 X 与 Y **同伦等价**，或说 X 与 Y 有相同伦型，记作 $X \simeq Y$，称 f 为从 X 到 Y 的一个同伦等价，写作 $f: X \simeq Y$；而称 g 为 f 的**同伦逆**.

以上定义并不复杂，从形式上看，条件(8)不过是将1.1节式(10)中的等号改成了同伦等价号$\simeq$而已. 如果将式(8)中$\simeq$改成$=$：$gf = 1_X, fg = 1_Y$，则必有 $g = f^{-1}$，因而 f 是一同胚.

满足条件(8)的 f 具有哪些性质，眼下是完全不清楚的. 关键在于，从式子 $gf \simeq 1_X$ 不容易直接看出 f 与 g 有何关系. 至于 $f_0 \simeq f_1$ 的意义，从定义来看还是比较清楚的. 直观上，可以想象空间 $X \times Y$ 中的连续曲线 H_t 随 t 的变化而连续变化，t 就看作时间，当 t 从0变到1时，H_t 恰好从 $H_0 = f_0$ 变到 $H_1 = f_1$（见图2-2）.

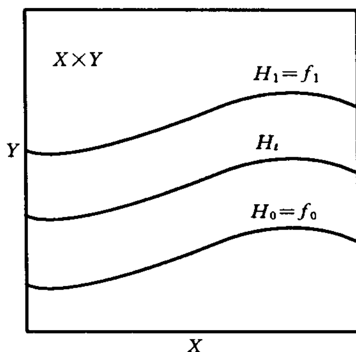


图 2-2

下面来验证同伦等价确具有本段开头所预期的性质. 为此，首先说明映射的同伦是一等价关系.

2.4.16 命题 (i) 由定义2.4.15(i)所定义的$\simeq$是 $C(X,Y)$ 上的一个等价关系.

(ii) 设 $f,g \in C(X,Y)$，$\varphi,\psi \in C(Y,Z)$. 若 $f \simeq g$，$\varphi \simeq \psi$，则 $\varphi f \simeq \psi g$.

证 大部分证明是简单的，下面只给出一个简略勾画.

(i) 设 $f,g,h \in C(X,Y)$. 若取 $H(t,x) \equiv f(x)$，则 $H: f \simeq f$. 若 $H: f \simeq g$，令

$$\widetilde{H}(t,x) = H(1-t,x) \quad ((t,x) \in J \times X),$$

则 $\widetilde{H}: g \simeq f$. 若 $H: f \simeq g, G: g \simeq h$，定义

$$F(t,x) = \begin{cases} H(2t,x), & (t,x) \in [0,1/2] \times X, \\ G(2t-1,x), & (t,x) \in [1/2,1] \times X, \end{cases}$$

则 $F: f \simeq h$. 这就验证了$\simeq$是 $C(X,Y)$ 上的等价关系.

(ii) 设 $F: f \simeq g, G: \varphi \simeq \psi$. 定义

$$H(t,x) = G(t,F(t,x)),$$

或 $H_t = G_t F_t (t \in J)$，则 $H: \varphi f \simeq \psi g$. □

在命题2.4.16的基础上，现在已易推出我们所需要的以下结论.

2.4.17 命题 同伦等价有以下性质：

(i) $1_X: X \simeq X$.

(ii) 若 $f: X \simeq Y$，g 是 f 的同伦逆，则 $g: Y \simeq X$.

(iii) $f: X \simeq Y, \varphi: Y \simeq Z \Rightarrow \varphi f: X \simeq Z$.

(iv) $f: X \cong Y \Rightarrow f: X \simeq Y$.

证 (i)、(ii)、(iv)都是显然的,下面证(iii). 设 g 与 h 分别为 f 与 φ 的同伦逆,则

$$gf \simeq 1_X, \quad fg \simeq 1_Y,$$
$$h\varphi \simeq 1_Y, \quad \varphi h \simeq 1_Z.$$

于是用命题2.4.16(ii)得

$$gh\varphi f \simeq gf \simeq 1_X, \quad \varphi fgh \simeq \varphi h \simeq 1_Z,$$

这表明 $\varphi f: X \simeq Z$. □

利用命题2.4.17及本段开头的说明,就可以仿照对同胚的作法,对同伦等价提出相应的术语与结论:互相同伦等价的拓扑空间组成一个**同伦等价类**,不同类的空间既不同伦等价,也不同胚. 在同伦等价之下保持不变的性质称为**同伦不变性质**或同伦不变量. 一个同伦不变性质若为某个拓扑空间 X 所具有,则亦必为 X 所属的同伦等价类所共有,当然也为 X 所属的同胚等价类所共有,因而是一个拓扑性质. 不过,同伦不变性质只是拓扑性质的一部分,而且可能是更特殊、更隐蔽、或许也更有趣的一部分. 这一论断自然隐含了一个前提,即同伦等价类是同胚等价类的真正扩大. 事实确实如此,下面的简单例子即可证实.

2.4.18 例 设 $X \subset \mathbf{R}^n$ 是一非空凸集. 取定 $x_0 \in X$, 定义映射

$$H: J \times X \to X, \quad (t, x) \to tx_0 + (1-t)x,$$

则 $H \in C(J \times X, X), H_0 = 1_X, H_1 \equiv x_0$. 记 $Y = \{x_0\}, i: Y \to X$ 是包含映射, 定义 $f(x) \equiv x_0 (x \in X)$, 则

$$if = H_1 \simeq 1_X, \quad fi = 1_Y,$$

可见 $f: X \simeq Y$. 这表明 X 竟然与仅含一点的空间(就称为**单点空间**)同伦等价! 凡与单点空间同伦等价的拓扑空间称为**可缩空间**. 由可缩空间构成的同伦等价类惊人地庞大,其中包含Euclid 空间及其中的凸子集,也包含了所有拓扑向量空间及其中的凸子集,还包含了许多其他形式的空间. 仅就同伦不变性质的研究而言,无论 $\mathbf{R}^n$ 还是拓扑向量空间都是不必考察的,因为它们都可代之以单点空间! 在这个意义上,可缩空间无疑是最简单的拓扑空间.

习　题

若题中涉及点集 A, B 等的拓扑性质,则认定它们含于某个给定的拓扑空间;若涉及空间 X, Y 等的拓扑性质而未做假定,则认定它们是给定的拓扑空间.

1. 列举集 $X = \{0, 1\}$ 上的所有拓扑.

2. 设 X 是一集, $x_0 \in X, \tau = \{\varnothing\} \cup \{A : x_0 \in A \subset X\}$. 验证 τ 是 X 上的一个拓扑(当 X 仅含两点时称为**Sierpinski 空间**).

3. 设 $A_i = \{1,2,\cdots,i\}(1 \leqslant i \leqslant n)$，则 $\tau = \{\varnothing\} \cup \{A_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是 $X = A_n$ 上的一个拓扑. 写出这种拓扑的一个推广.

4. 设 $A_n = \{n, n+1, \cdots\}$，则 $\tau = \{\varnothing\} \cup \{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ 是 $\mathbf{N}$ 上的一个拓扑.

5. 设 $\tau = \{X, \varnothing, A, B\}$ 是 X 上的一个拓扑，$A, B \neq X, \varnothing$. A, B 有何性质？

6. 设 $\tau_i (i \in I)$ 是 X 上的一组拓扑，则 $\tau = \bigcap \tau_i$ 是 X 上的拓扑.

7. 设 $\tau_i (i \in I)$ 是 X 上的一组拓扑，则 $\beta = \bigcup \tau_i$ 不必是 X 上的拓扑，但 X 上存在一个包含 β 的最小拓扑.

8. 设 $\mathbf{R}$ 上用通常拓扑，则 $\mathscr{A} = \{(-\infty, \alpha), (\alpha, \infty) : \alpha \in \mathbf{Q}\}$ 与 $\mathscr{B} = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbf{Q}\}$ 分别为 $\mathbf{R}$ 的拓扑子基与拓扑基.

9. 设 $\mathscr{A} = \{(-\infty, a), [a, \infty) : a \in \mathbf{R}\}$，$\mathscr{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbf{R}\}$，则 $\mathbf{R}$ 上有一拓扑 τ，所谓右区间拓扑，它分别以 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 为拓扑子基与拓扑基.

10. 设 $\mathscr{B}$ 是拓扑空间 (X, τ) 的拓扑基，则 $\mathscr{B}$ 满足定理 2.1.5 中的条件(i)和(ii).

11. 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subset 2^X$ 是拓扑基，则二者生成同一拓扑的充要条件是：(i) $x \in B \in \mathscr{B} \Rightarrow \exists A \in \mathscr{A} : x \in A \subset B$；(ii) $x \in A \in \mathscr{A} \Rightarrow \exists B \in \mathscr{B} : x \in B \subset A$. 若仅条件(i)满足，结论如何？

12. 求 X 上使有限集为闭集的最小拓扑.

13. 设空间 (X, τ) 有无限个点，τ 包含所有无限集，则 τ 是离散拓扑.

14. 设 $\mathbf{R}$ 上的拓扑 τ 包含 $\mathbf{R}$ 的所有不可数子集，则 τ 是离散拓扑.

15. 设 (X, τ) 是一拓扑空间，$\mathscr{B} \subset \tau$，$\mathscr{B}_x = \{B \in \mathscr{B} : x \in B\}$，则 $\mathscr{B}$ 是拓扑基 $\Leftrightarrow \forall x \in X$，$\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域基；$\mathscr{B}$ 是拓扑子基 $\Leftrightarrow \forall x \in X$，$\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域子基.

16. 证明定理 2.1.8.

17. 设 τ_w, τ_s 分别为 X 上的平凡拓扑与离散拓扑，$\{x_t\} \subset X$ 是一个网，研究 $\{x_t\}$ 依 τ_w 与 τ_s 的收敛性.

18. 设 $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$，则依上拓扑 $x_n \to x \Leftrightarrow \overline{\lim_n} x_n \leqslant x$.

19. 设 $\mathbf{R}$ 中采用右区间拓扑(见题 9)，研究其中的序列收敛. 序列 $\{1/n\}$ 与 $\{-1/n\}$ 是否收敛？

20. 设 X 是有限补拓扑空间，研究其中的序列收敛.

21. 设 X 是可数补拓扑空间，研究其中的序列收敛.

22. 设 $\mathbf{R}$ 中用通常拓扑，$\{x_i : i \in I\} \subset \mathbf{R}$，给出和式 $\sum_i x_i$ 的一个定义.

23. $\overline{A} \cap B^\circ \subset \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

24. $V \subset X$ 为开集 $\Leftrightarrow \forall A \subset X$，有 $\overline{A} \cap V \subset \overline{A \cap V}$.

25. $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$；$(A \setminus B)^\circ \subset A^\circ \setminus B^\circ$.

26. 闭包公理等价于 $A \cup \overline{A} \cup \overline{\overline{A}} = \overline{A \cup B} \setminus \overline{\varnothing} (A, B \subset X)$.

27. 若算子 $A \to A^\circ (A \subset X)$ 满足内部公理 2.1 节式(19)′，则 X 上存在唯一拓扑 τ 使 A° 恰为 A 的内部.

28. $A^\circ = \bigcup \{B : A \supset B \in \tau\}$.

29. $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$；$\partial(\partial A) \subset \partial A$；$\partial A^\circ \subset \partial A$.

30. $A \cap B \cap \partial(A \cap B) = A \cap B \cap (\partial A \cup \partial B)$.

31. $A \cap \partial A = \varnothing \Leftrightarrow A$ 是开集；$\partial A \subset A \Leftrightarrow A$ 是闭集；$\partial A = \varnothing \Leftrightarrow A$ 是既开又闭的集.

32. 设算子 $A \to A^b (A \subset X)$ 有性质：$\varnothing^b = \varnothing, A^b = A^{cb}, A^{bb} \subset A^b, A \cap B \cap (A \cap B)^b = A \cap B \cap (A^b \cup B^b)$，则 X 上存在唯一拓扑 τ，依此拓扑有 $\partial A = A^b$.

33. $\overline{A} = A \cup A', A$ 是闭集 $\Leftrightarrow A' \subset A$.

34. 导集有以下性质：$\varnothing' = \varnothing, A'' \subset A \cup A', (A \cup B)' = A' \cup B', x \overline{\in} \{x\}'$. 若算子 $A \to A'(A \subset X)$ 有以上性质，则 X 上存在唯一拓扑 τ，使 A' 恰为 A 的导集.

35. $A'' \subset A'$ 不必成立；A' 不必为闭集.

36. 设 $A' \subset B \subset A$，则 B 是闭集.

37. 设 X 是度量空间，$A \subset X$，则 $x \in A^\circ \Leftrightarrow d(x, A^c) > 0, x \in A' \Leftrightarrow d(x, A \backslash \{x\}) = 0$.

38. 设 X 是度量空间，$A \subset X$，则 $\operatorname{diam} \overline{A} = \operatorname{diam} A$.

39. 设 X 是度量空间，$x \in X, r > 0$，则 $\overline{B_r(x)} \subset \overline{B}_r(x)$. $\subset$ 是否可改为$=$？

40. X 是离散拓扑空间 $\Leftrightarrow$ 对任给拓扑空间 Y，每个 $F: X \to Y$ 连续.

41. X 是平凡拓扑空间 $\Leftrightarrow$ 对任给拓扑空间 Y，每个 $F: Y \to X$ 连续.

42. 设每个函数 $f: X \to \mathbf{R}$ 连续，则 X 为离散拓扑空间.

43. 设 $F: X \to Y, x \in X$，则 F 在 x 连续 $\Leftrightarrow$ 对 Fx 的任何邻域子基$\mathscr{B}$，有 $F^{-1}\mathscr{B} \subset \mathscr{N}_x$.

44. 设 $F: X \to Y, x_0 \in X$，则 F 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow$ 当 $x \to x_0$ 时 $Fx \to Fx_0$（见定义 2.1.10 (vi)）.

45. $F: X \to Y$ 连续 $\Leftrightarrow \forall B \subset Y$，有 $\partial(F^{-1}B) \subset F^{-1}(\partial B)$.

46. 设 $f: X \to \mathbf{R}, \overline{A} = \mathbf{R}, \forall a \in A, \{f < a\}$ 与 $\{f > a\}$ 为开集，则 $f \in C(X)$.

47. 设 X 为具有上拓扑的$\mathbf{R}$，τ 是$\mathbf{R}$ 上的通常拓扑，给出 $f: (\mathbf{R}, \tau) \to X$ 连续的条件.

48. 设 τ 与 τ_1 分别为$\mathbf{R}$ 上的通常拓扑与右区间拓扑，给出 $f: (\mathbf{R}, \tau_1) \to (\mathbf{R}, \tau)$ 连续的条件，讨论 $g = \chi_{(0,\infty)}$ 与 $h = \chi_{[0,\infty)}$ 的连续性.

49. 设 $f, g \in C(X)$，则 $f + g \in C(X), fg \in C(X)$.

50. 设 $\{f_t\} \subset C(X)$ 是一个网，$f_t \rightrightarrows f$，即 $\forall \varepsilon > 0, \exists t_0, \forall t \geqslant t_0, \forall x \in X$，有 $|f_t(x) - f(x)| < \varepsilon$，则 $f \in C(X)$.

51. 将题 50 的结论推广到 $\{f_t\} \subset C(X, Y), Y$ 是一度量空间.

52. 设 $F: X \to Y$ 为双射，则 F 是开映射 $\Leftrightarrow F$ 是闭映射.

53. 设 $F: X \to Y, G: Y \to Z, GF$ 是开映射. 若 F 是连续满射，则 G 是开映射；若 G 是连续单射，则 F 是开映射. 若将问题中的“开映射”改为“闭映射”，能否保持结论成立？

54. $f: \mathbf{R} \to S^1, x \to e^{ix}$ 是开映射而非闭映射.

55. $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (x, y) \to (x, |y|)$ 是闭映射而非开映射.

56. 任何连续双射 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是开映射，从而有连续逆映射.

57. 设 $A \subset S \subset X, A^i$ 记 A 在 S 中的相对内部，则 $A^\circ = S^\circ \cap A^i$.

58. 设 $A \subset S \subset X, A^b$ 记 A 在 S 中的相对边界，则 $A^b \subset S \cap \partial A$.

59. 设 $A \subset S \subset X, A^d$ 记 A 在 S 中的相对导集，则 $A^d = S \cap A'$.

60. $F: X \to Y$ 连续 $\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists V \in \mathscr{N}_x, F|V \in C(V, Y)$.

61. 设 $F: X \to Y, X = \bigcup_1^\infty A_n, A_n \subset A^\circ_{n+1}, F|A_n \in C(A_n, Y)(n \geqslant 1)$，则 $F \in C(X, Y)$.

62. 设 (X, τ) 是 $(X_i, \tau_i)(i \in I)$ 的积空间，$\mathscr{B}_i$ 是 τ_i 的拓扑子基，则 $\mathscr{B} \triangleq \bigcup P_i^{-1}\mathscr{B}_i$ 是 τ 的拓扑子基.

63. 设 (X,τ) 是 $(X_i,\tau_i)(1\leqslant i\leqslant n)$ 的积空间，$\mathscr{B}_i$ 是 τ_i 的拓扑基，则 $\mathscr{B}=\{\prod B_i: B_i\in\mathscr{B}_i(1\leqslant i\leqslant n)\}$ 是 τ 的拓扑基.

64. 投影 $P_i:\prod X_i\to X_i$ 不必为闭映射.

65. 设 $A\subset X,B\subset Y$，则 $\partial(A\times B)=(\partial A\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\partial B)$.

66. 取定 $x^0\in X=\prod_{i\in I}X_i$，令 $A=\{x\in X:$ 除有限个例外 $x_i=x_i^0\}$，则 $\overline{A}=X$.

67. 设 $A\subset X,B\subset Y$，则 $A\times B$ 的积拓扑是 $X\times Y$ 的积拓扑导出的相对拓扑.

68. 设$\mathbf{R}$具有右区间拓扑(见题9)，$S=\{(x,-x):x\in\mathbf{R}\}$，求 S 在$\mathbf{R}^2$ 中的相对拓扑.

69. 设 $X=\prod_{i\in I}X_i$，则 X 是离散空间$\Leftrightarrow$每个 X_i 是离散空间，且除至多有限个例外 X_i 是单点空间.

70. 设 X 非单点空间，Ω 是无限集，则 X^Ω 必非离散空间. 特别，$\{0,1\}^\omega$ 必非离散空间.

71. 设 $(X_i,\tau_i)(i\in I)$ 是一族拓扑空间，$X=\prod X_i$，$\beta=\{\prod A_i: A_i\in\tau_i(\forall i\in I)\}$，则以 β 为基在 X 中生成一拓扑，称为**箱拓扑**. 箱拓扑强于积拓扑；箱拓扑＝积拓扑 $\Leftrightarrow$ 除至多有限多个例外 τ_i 是平凡拓扑.

72. 设 $(X_i,\tau_i)(i\in I)$ 是一族拓扑空间，Ω 是一非空集，$F_i:\Omega\to X_i$. 则 Ω 上存在一个使每个 F_i 连续的最小拓扑(称为由映射族 $\{F_i:i\in I\}$ 诱导的拓扑). 若 $S\subset X$，则 S 上的相对拓扑是由包含映射 $i:S\subset X$ 诱导的拓扑；$X=\prod X_i$ 上的积拓扑是由投影族 $\{P_i:i\in I\}$ 诱导的拓扑.

73. 设 $F:X\to Y$ 与 $G:Y\to Z$ 均为商映射，则 GF 是商映射.

74. 设 $F\in C(X,Y)$，$G\in C(Y,Z)$，GF 是商映射，则 G 是商映射.

75. 设 $F:X\to Y$ 是商映射，$B\subset Y$，$A=F^{-1}B$ 是非空开(或闭)集，则 $F|A:A\to B$ 是商映射.

76. 设 $F\in C(X,Y)$，$\sim$ 与$\approx$分别为 X 与 Y 中的等价关系，$x\sim z\Rightarrow Fx\approx Fz$，则 $G:X/\sim\to Y/\approx$，$[x]\to[Fx]$ 为连续映射；若 F 是商映射，则 G 为商映射；若进而设 $x\sim z\Leftrightarrow Fx\approx Fz$，则 G 是同胚.

77. 将圆柱面 $S^1\times J$ 的上、下底分别粘合成一点，描述所得的商空间.

78. $X=J\times J$ 的两竖边反向粘合，描述所得的商空间.

79. 环面上一经圆与一纬圆粘合成一点，描述所得的商空间.

80. 设 $B^2=\{x\in\mathbf{R}^2:|x|\leqslant 1\}$，则 $B^2\cong J\times J$.

81. 设 $B=\{x\in\mathbf{R}^n:|x|<1\}$，则 $B\cong\mathbf{R}^n$.

82. 将 $T^2=S^1\times S^1$ 拓扑嵌入 $\mathbf{R}^3$ 中.

83. 设 $F\in C(X,Y)$，$G\in C(Y,X)$. 若 GF 为同胚，则 F 是拓扑嵌入，G 是商映射；若加上 G 为双射，则 F 与 G 均为同胚.

84. 设 X 可拓扑嵌入 Y，则存在空间 $Z\cong Y$，Z 以 X 为子空间.

85. 设 $F:X\to Y$，$G:X\to X\times Y$，$x\to(x,Fx)$，则 F 连续$\Leftrightarrow G$ 是拓扑嵌入.

86. 设 $X_n(n\in\mathbf{N})$ 是第一可数空间，则 $X=\prod X_n$ 是第一可数空间.

87. 设 X 是第一可数空间，其中有限集为闭集，$A\subset X$，$x\in A'$，则有互不相同的 $x_n\in A\setminus\{x\}(n\in\mathbf{N})$，使 $x_n\to x$.

88. 设 X 是第二可数空间，$\mathscr{A}$ 是开集族，$\mathscr{A}^{\#} = X$，则有可数族 $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$，使 $\mathscr{B}^{\#} = X$.

89. 设 X 是第二可数空间，$A \subset X$ 是不可数集，则 A 中至少有一点，它的每一邻域含 A 中不可数多个点(这样的点称为 A 的凝点，凝点必为聚点).

90. 设 X 是第二可数空间，$\mathscr{A}$ 是 X 中一族互不相交的非空开集，则 $\mathscr{A}$ 是可数族.

91. 设 X 是第二可数空间，$\forall x \in X, \exists V \in \mathscr{N}_x$: V 是可数集，则 X 是可数集.

92. 设 X 是有限补拓扑空间，则 X 是可分的；X 是第一可数的 $\Leftrightarrow$ X 是第二可数的 $\Leftrightarrow$ X 是可数集.

93. 设 X 是可数补拓扑空间，则 X 是第一可数的 $\Leftrightarrow$ X 是第二可数的 $\Leftrightarrow$ X 是离散空间 $\Leftrightarrow$ X 可分 $\Leftrightarrow$ X 是可数集.

94. $\mathbf{R}$ 依右区间拓扑(参见题9)是第一可数的、可分的但非第二可数的，$\mathbf{R}^2$ 可分但有一不可分子空间.

95. $\{0,1\}^{\Omega}$ 是第一可数的 $\Leftrightarrow \{0,1\}^{\Omega}$ 是第二可数的 $\Leftrightarrow$ Ω 是可数集.

96. 设 Ω 是一无限集，$B(\Omega)$ 是 Ω 上有界实函数之全体，则 $B(\Omega)$ 依度量 $d(x,y) = \sup\limits_{\omega}|x(\omega) - y(\omega)|$ 是不可分的.

97. 设 $\infty \overline{\in} X, X_\infty = X \cup \{\infty\}, \tau_\infty = \{\varnothing\} \cup \{A \cup \{\infty\} : A \in \tau\}$，则 (X_∞, τ_∞) 是可分拓扑空间；X_∞ 是第二可数的 $\Leftrightarrow X$ 是第二可数的.

98. 设 X_n 可分，则 $X = \prod_1^\infty X_n$ 可分.

99. 设 X 是Cantor 集，则 $X \cong \{0,1\}^{\omega}$.

100. 设 A, B 是 X 的稠集且其中之一为开集，则 $A \cap B$ 是稠集.

第3章　分离性·紧性与连通性

在第2章中，除了2.4C，2.4D之外，所建立的拓扑空间理论仅仅依靠开集公理（参见定义2.1.1）这样几条看来极度简单贫乏的假设. 尽管如此，我们似乎仍然收获了颇为丰富的果实；至少，已成功地将极限与连续性概念纳入到一个逻辑上一贯的一般体系之内，而这正是我们一开始就关注的首要问题. 不过，你一定已感觉到所展开理论的局限性. 还有许多你所熟知的极限与连续性定理，其中包括像极限唯一性这样的基本结论，都还未获得立足之地. 无疑，这只能归因于所依靠的公理系统的过度贫乏. 唯有加入新的假设，才能使拓扑空间理论的继续发展获得必要的支撑与动力. 本章依次引入三类新的假设，即分离性、紧性与连通性. 每类假设界定出一类特殊的拓扑空间，即具有一定分离性的空间、紧空间与连通空间. 你将发现，在这些特殊的拓扑空间中，我们所熟知的许多经典定理将获得令人满意的推广.

每条新加入的假设，都界定出一个相应的拓扑性质. 在这个意义上，可以说本章就是关于分离性、紧性与连通性这三个（更恰当地说是三族，因有几种不同意义的分离性、紧性与连通性）拓扑性质的考察. 如在2.4B中所指出的那样，在研究一个拓扑性质时所提出的首要问题是：

(i) 该性质有哪些等价刻画？

(ii) 该性质是否是遗传的、可乘的？是否在连续映射下保持不变？

(iii) 该性质与其他拓扑性质有何逻辑关系？

本章的内容大体上围绕着上述问题展开. 对于这些问题的解答，构成一系列拓扑命题，其中有些可能比较平凡，有些（例如Tychonoff定理，见定理3.2.4）则是有重大意义的拓扑学定理. 大量有重要价值的结果的涌现，一方面展示了拓扑空间理论的丰富性，同时也有力地证明：在2.4节中所给出的拓扑空间理论基本问题的提法是恰当而有效的.

拓扑空间的性质当然并不限于本章所考虑的分离性、紧性与连通性. 但无论从哪个角度来看，本章所考虑的这些性质对于拓扑空间的研究与应用都是最基本的. 因此，在带入门性质的本书中，本章无疑处于中心地位. 它占去了最大的篇幅，大概也会占去读者精力的主要部分.

本章沿用第2章的所有记号，特别，X，Y 等记拓扑空间，τ_X，τ_Y 等记其中的拓扑.

3.1 分 离 性

定义 2.1.7 定义了拓扑空间中点的邻域，该定义可自然地推广到点集的邻域：任给 $A \subset X$，令（对照 2.1 节式(6)）

$$\mathscr{N}_A = \{V \subset X : A \subset V^\circ\}, \tag{1}$$

称 $\mathscr{N}_A$ 为集 A 的邻域系，称每个 $V \in \mathscr{N}_A$ 为集 A 的邻域. 设 $A,B \subset X$，若有 $U \in \mathscr{N}_A, V \in \mathscr{N}_B$，使得 $U \cap V = \varnothing$，则说 A 与 B 可**邻域分离**，且说 U 与 V 分离 A 与 B（见图 3-1）. 由邻域的定义可直接看出，若 U,V 分离 A,B，则 U°, V° 亦分离 A,B，于是 A 与 B 被开邻域分离，或简称为**开集分离**. 这样，**邻域分离等价于开集分离**.

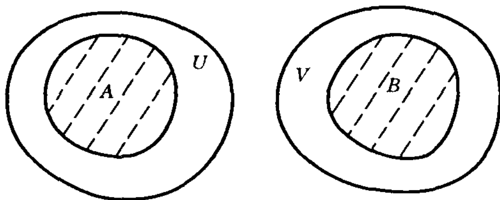


图 3-1

显然，A 与 B 可邻域分离的必要条件是 $A \cap B = \varnothing$. 至于充分条件，则既与对 A,B 的假定有关，也与空间的拓扑性质有关. 说到拓扑空间的分离性，所指的就是其中一定性质的一对集可邻域分离. 在拓扑学中，依据条件从弱到强的顺序，将分离性表成一个系列 T_i，其中 $i = 0,1,2,3$ 等，T_0 最弱，i 越大则 T_i 越强. 若拓扑空间 X 具有分离性 T_i，则说 X 满足 T_i 分离公理（或 T_i 分离条件），或称 X 为 T_i 空间，这些都看作同义语. 本节仅考虑 $\mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3, \mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ 与 T_4 分离性，它们是最基本而常用的.

如果 $A,B \subset X$ 可邻域分离，则涉及 A,B 的问题可在 X 的两个互不相交的开子空间内分别处理，这就可能带来一定程度的简化. 这可看作分离性的直接好处. 不过，分离性的更深刻的价值在于，一定的分离性条件导致关于空间的一定拓扑结论，这些结论初看起来也许并不直接联系于分离性，而它们的重要应用则证明了对空间的分离性假设是不可缺少的.

A. T_2 空间

我们已多次提到，拓扑空间中极限的唯一性问题悬而未决. 现在此问题可由一个分离性条件彻底解决.

3.1.1 定义　若拓扑空间 X 中任一对相异点可邻域分离，则说 X 满足 T_2 分

离公理，且称 X 为 T_2 **空间或 Hausdorff 空间**.

下面来看一个 T_2 空间的例子. 设 X 是度量空间，$x,y \in X, x \neq y$，则必 $2r \triangleq d(x,y) > 0$（依定义 2.1.14(D_3)），于是 x 与 y 被球 $B_r(x)$ 与 $B_r(y)$ 分离. 这表明度量空间必为 T_2 空间，T_2 空间的普遍性于此可见. 非 T_2 空间的例子亦可信手拈来，例如，多于一个点的平凡拓扑空间就显然不是 T_2 空间；带上拓扑的实直线（见例 2.1.2(ii)）与含无限个点的有限补拓扑空间（见例 2.1.13(iv)）也不是 T_2 空间. 后面这个例子表明，若坚持 T_2 分离性，则不免要排除一些颇为有趣的拓扑空间. 但现代数学中最常用的那些拓扑空间可以说都是 T_2 空间. 因此，将对分离性的最低要求定在 T_2，而不是定在更低的 T_1 ①或 T_0 是合理的，这样可以简化许多拓扑结论的表述，排除那些明显地呈病态的现象，而又不致造成真正重大的损失.

现在来看用 T_2 分离性如何解决极限唯一性问题.

3.1.2 命题　对于拓扑空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是 T_2 空间；

(ii) X 中任何收敛网有唯一极限；

(iii) 积空间 $X \times X$ 中的对角线 Δ（依 1.1 节式(21)）为闭集.

证　(i)⇒(ii). 设 $\{x_t\}$ 是 X 中的网，$x_t \to x, x_t \to y$. 若 $x \neq y$，则由 T_2 分离性有 $U \in \mathscr{N}_x, V \in \mathscr{N}_y$，使得 $U \cap V = \varnothing$. 另一方面，由 $x_t \to x$ 与 $x_t \to y$ 推出必有 $x_t \in U \cap V$，得出矛盾. 因此必 $x = y$.

(ii)⇒(iii). 设 $(x,y) \in \overline{\Delta}$，则有 Δ 中的网 $\{(x_t,x_t)\}$，使得

$$(x_t,x_t) \to (x,y). \quad \text{（用 2.1 节式(20)）}$$

这就推出 $x_t \to x, x_t \to y$（用命题 2.3.7(iv)），于是由条件(ii)得出 $x = y$，即 $(x,y) = (x,x) \in \Delta$. 因此 Δ 是闭集.

(iii)⇒(i). 设 $x,y \in X, x \neq y$，则 $(x,y) \overline{\in} \Delta$. 由 Δ 为闭集推出 Δ 不交 (x,y) 的某个邻域 W. 可设 $W = U \times V$，U,V 分别为 x,y 的开邻域. 由 $\Delta \cap (U \times V) = \varnothing$ 推出 $U \cap V = \varnothing$（见图 3-2），故 U,V 分离 x,y. 这表明 X 是 T_2 空间. □

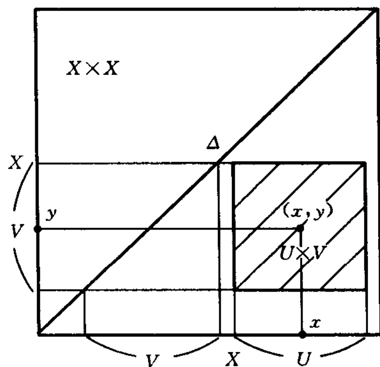


图 3-2

命题 3.1.2 的结论特别有力地证实了选择 T_2 分离性作为最低分离性要求的合理性：

① 单点集皆为闭集的拓扑空间称为 T_1 空间. 有限补拓扑空间就是 T_1 空间.

放弃 T_2 分离性就等于放弃对极限的唯一性要求，而没有唯一性的极限论是很少有价值的.

你必定注意到，本书尚未用过 $\lim_t x_t = x$ 这样的极限等式. 在不能肯定极限唯一的情况下，这是很自然的. 有了命题3.1.2之后，在 T_2 空间中不妨使用 $\lim_t x_t$ 这样的极限记号.

按照我们预定的思考路线，考察过 T_2 分离性的等价刻画之后，现在该转入讨论 T_2 分离性的"不变性"了.

3.1.3 命题　(i) T_2 分离性是遗传的，即 T_2 空间的子空间必为 T_2 空间.

(ii) 设 X 是拓扑空间 $X_i (i \in I)$ 的积空间，则 X 是 T_2 空间 $\Leftrightarrow$ 每个 $X_i\ (i \in I)$ 是 T_2 空间. 因此，T_2 分离性是可乘的.

证　(i) 设 X 是 T_2 空间，S 是 X 的子空间，$\{x_t\}$ 是 S 中的收敛网，则 $\{x_t\}$ 亦是 X 中的收敛网(依命题2.3.2(iv))，因而有唯一极限. 故 S 是 T_2 空间(用命题3.1.2(ii)).

(ii) 若 X 是 T_2 空间，则 $X_i (i \in I)$ 作为 X 的子空间(用例2.4.4(ii))是 T_2 空间. 反之，设每个 $X_i (i \in I)$ 是 T_2 空间，$\{x^t\}$ 是 X 中的收敛网，则每个 $\{x_i^t\}$ 是 X_i 中的收敛网，因而有唯一极限 $x_i \in X (i \in I)$，于是 $x = (x_i)$ 是 $\{x^t\}$ 的唯一极限(用命题2.3.7(iv))，这表明 X 是 T_2 空间.　□

以上证明固然简单，亦颇值得品味. 我们有意用了一个完全的"收敛性论证"，而回避了 T_2 分离性的邻域刻画，主要在于促请你注意运用 T_2 分离性原定义之外的等价刻画. 这一想法在它处也是值得注意的. 当然，对于一个概念的多种等价刻画，运用时的具体选择完全应依情况而定，并无一定模式.

从命题3.1.3看出，就遗传性与可乘性而言，T_2 分离性已经够好的了. 但就与连续映射的关系而言，却没有简单的肯定结论. 特别地，T_2 空间的商空间就未必是 T_2 空间. 不过容易看出，T_2 分离性在开(或闭)双射下不变. 但这样的结论应用机会似乎并不多.

3.1.4 例　将 $\mathbf{R}$ 中的所有有理点粘合成一点 q，所有无理点粘合成一点 q'，如此得到商空间 $\widetilde{\mathbf{R}} = \{q, q'\}$，以 $P: \mathbf{R} \to \widetilde{\mathbf{R}}$ 记投影. 设 $B \subset \widetilde{\mathbf{R}}$，则

$$P^{-1}B = \begin{cases} \varnothing, & B = \varnothing, \\ \mathbf{Q}, & B = \{q\}, \\ \mathbf{Q}^c, & B = \{q'\}, \\ \mathbf{R}, & B = \widetilde{\mathbf{R}}. \end{cases}$$

由此可见 $P^{-1}B$ 为开集 $\Leftrightarrow B = \varnothing$ 或 $\widetilde{\mathbf{R}}$，这表明 $\widetilde{\mathbf{R}}$ 上的商拓扑是平凡拓扑(用定义2.3.9)，因此商空间 $\widetilde{\mathbf{R}}$ 不是 T_2 空间.

商空间往往分离性很差，这是一个被普遍注意到且令人遗憾的事实. 究其原

因，实际上在于形成商空间的"粘合"的高度随意性，如例3.1.4中所用的那种怪异粘合，导致分离性很差的商拓扑是不奇怪的.

B. T_3 **空间**

3.1.5 定义　设 X 是 T_2 空间，且 X 中任一点与不含该点的闭集可邻域分离（见图3-3），则说 X 满足 T_3 **分离公理**，且称 X 为 T_3 **空间或正则空间**①.

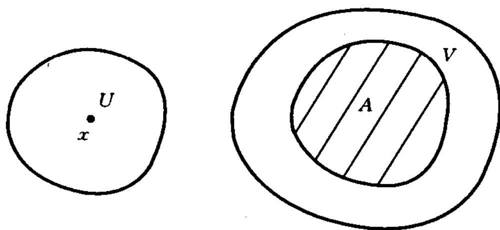


图3-3

T_3 分离公理也称为Vietories公理.

注意，直接依定义有 $T_3 \Rightarrow T_2$.

3.1.6 命题　对于一个 T_2 空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是 T_3 空间；

(ii) X 中任一点与不含该点的闭集可用闭邻域分离；

(iii) X 中每点有一个闭邻域基（即由闭邻域组成的邻域基）.

证　(i)⇒(ii). 设 $A \subset X$ 是闭集，$x \in A^c$. 由 T_3 分离性，可取开集 U,V 分离 x 与 A. 因 U^c 是闭集且 $x \overline{\in} U^c$，故又可取开集 U_1,V_1 分离 x 与 U^c. 于是

$$x \in U_1 \subset \overline{U}_1 \subset \overline{V_1^c} = V_1^c \subset U, \quad A \subset V \subset U^c,$$

这表明 $\overline{U}_1$ 与 U^c 是分离 x 与 A 的闭邻域.

(ii)⇒(iii). 设 $x \in X$，U 是 x 的开邻域. 由条件(ii)，x 与 U^c 可用闭邻域 V 与 W 分离，于是

$$x \in V \subset W^c \subset U.$$

可见 x 的每个开邻域包含 x 的一个闭邻域，这正说明 x 有一个闭邻域基.

(iii)⇒(i). 设 $A \subset X$ 为闭集，$x \in A^c$. 因 A^c 是 x 的开邻域，故由条件(iii)知 A^c 包含 x 的一个闭邻域 V，于是 V 与 V^c 是分离 x 与 A 的邻域. 故 X 是 T_3 空间. □

命题3.1.6（结合定义3.1.5）对 T_3 分离性给出的三种等价刻画差别并不大，

① "T_3 空间"与"正则空间"这两个名称的用法，不同文献颇不一致. 有些文献对 T_3 空间不要求 T_2 分离性，有些文献则对正则空间不要求 T_2 分离性. 本书中以要求 T_2 分离性作为底线，这些差别自然不再有意义. 对于下面将考虑的 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间与 T_4 空间亦有类似情况. 本书的规定与文献[2]一致.

从运用方便的角度考虑,"每点有闭邻域基"这一刻画或许是最值得注意的.直观上,有闭邻域基也就是有**任意小**的闭邻域,这一描述有助于你形成对 T_3 空间的直观印象.与度量空间联系起来最容易获得这种直观印象:若 X 是度量空间,$x \in X$,则

$$\{\overline{B}_r(x) : 0 < r \in \mathbf{R}\}$$

就是 x 的一个闭邻域基.事实上,对 x 的任何球邻域 $B_s(x)(s > 0)$,当 $0 < r < s$ 时有 $\overline{B}_r(x) \subset B_s(x)$.以上事实表明度量空间必定是 T_3 空间.

以下结果与命题3.1.3呈现出完全的对应关系.

3.1.7 命题 (i) T_3 分离性是遗传的,即 T_3 空间的子空间亦为 T_3 空间.

(ii) 设 X 是拓扑空间 $X_i(i \in I)$ 的积空间,则 X 是 T_3 空间 $\Leftrightarrow$ 每个 $X_i(i \in I)$ 是 T_3 空间.因此,T_3 分离性是可乘的.

证 首先注意,因有命题3.1.3可用,证明中完全不必顾及 T_2 分离性.

(i) 设 X 是 T_3 空间,S 是 X 的子空间.任给 $x \in S$,设 $S \cap V$ 是 x 的相对开邻域,$V \subset X$ 为开集.因 V 是 x 的开邻域,由 X 的 T_3 分离性,x 有闭邻域 $B \subset V$.再取 x 的开邻域 $U \subset B$.于是

$$x \in S \cap U \subset S \cap B \subset S \cap V,$$

可见 $S \cap U$ 与 $S \cap B$ 分别为 x 的相对开邻域与相对闭邻域,这表明 x 有相对闭邻域基.因此 S 是 T_3 空间.

(ii) 若 X 是 T_3 空间,则 $X_i(i \in I)$ 必为 T_3 空间(参考命题3.1.3之证).反之,设每个 $X_i(i \in I)$ 为 T_3 空间,今证 X 满足命题3.1.6中的条件(iii).取定 $x \in X$ 及 x 的一个开邻域 V,不妨设

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} P_{i_k}^{-1} V_k,$$

其中 $\{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \subset I$,$V_k$ 是 x_{i_k} 的开邻域(参看命题2.3.7(ii)).取 x_{i_k} 的闭邻域 $B_k \subset V_k (1 \leqslant k \leqslant n)$,则 $P_{i_k}^{-1} B_k$ 是 x 的闭邻域(用命题2.2.2(ii),定理2.2.3(ii)),因而

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} P_{i_k}^{-1} B_k$$

是 x 的闭邻域,且显然有 $B \subset V$.这表明 x 有一个闭邻域基,如所要证. □

以上论证已体现出对 T_3 分离性运用"闭邻域基刻画"的好处.简言之,闭邻域基刻画的优势在于它将 T_3 分离性表达成了一个**局部性质**,这就可能简化处理.在涉及 T_3 分离性的其他场合,亦宜注意到这一点.

如同对 T_2 分离性一样,就 T_3 分离性与连续映射的关系而言,亦得不出什么简单的肯定结论.

现在考虑一些相关例子.

3.1.8 例 (i) 以 τ 记 $\mathbf{R}$ 上的通常拓扑,令

$$E = \{1/n : n \in \mathbf{N}\},$$
$$\tau_0 = \{V\backslash A : V \in \tau, A \subset E\}.$$

易直接验证 τ_0 是 $\mathbf{R}$ 上的一个拓扑，且 $\tau \subset \tau_0$，即 τ_0 强于通常拓扑，因而 $(\mathbf{R},\tau_0)$ 是 T_2 空间. 今指明 $(\mathbf{R},\tau_0)$ 不是 T_3 空间. 因 $\mathbf{R}\backslash E \in \tau_0$，故 E 是 $(\mathbf{R},\tau_0)$ 中的闭集(这是要点!). 若 U 与 V 是 $(\mathbf{R},\tau_0)$ 中分离点0与 E 的开集，则由 $E \subset V$ 及 τ_0 的构成知 $V \in \tau$，而 $U = W\backslash A, W \in \tau, A \subset E$. 因0是 W 的内点，故有 $\varepsilon > 0$，使得 $[0,\varepsilon) \subset W$. 由

$$\varnothing = U \cap V = (W \cap V)\backslash A$$

推出 $W \cap V = \varnothing$(否则，$W \cap V$ 是非空开集，从而是不可数集，而 A 是可数集，不可能有 $(W \cap V)\backslash A = \varnothing$). 于是

$$[0,\varepsilon) \cap E \subset W \cap E \subset V^c \cap E$$
$$\subset V^c \cap V = \varnothing.$$

但显然 $[0,\varepsilon) \cap E \neq \varnothing$，故得出矛盾. 可见点0与 E 不可能用开集分离，因而 $(\mathbf{R},\tau_0)$ 不是 T_3 空间.

以上例子表明，T_3 分离性实质性地强于 T_2 分离性.

(ii) 取 $X = \{1,2,3\}$，在其中定义如下拓扑：

$$\tau = \{X, \varnothing, \{1,2\}, \{3\}\}$$

(你试验证开集公理满足!). 注意 τ 同时也是 X 中的闭集族! 因 X 中的点1与点2显然不能被开集分离，故 X 不是 T_2 空间. 另一方面，因 X 中的闭集也是开集，故定义3.1.5中除 T_2 分离性之外的条件自动满足.

以上例子表明，若在定义3.1.5中去掉对 T_2 分离性的要求，将得到一个实质上较弱的概念. 像上面这个仅由三个点构成的拓扑空间，初看起来实在是匪夷所思，但它却能用来说明问题. 在拓扑空间理论中，这种专门设计的反例还不少见.

已经考虑过的 T_2 与 T_3 分离性，相对来说是比较简单的，关于它们甚至没有一个真正深刻的定理. 下面就要转入更强的 $T_{3\frac{1}{2}}$ 与 T_4 分离性了，对于它们的分析将展示一些深刻的结论，这些结论构成本节的最重要部分.

C. 全正则空间

这一类空间由某种函数分离性界定. 在正式描述这种分离性之前，需要作一些准备工作.

首先引入一些与连续函数有关的术语与记号. 设 $f \in C(X), A \subset X, \alpha \in \mathbf{R}$，约定

$$f(A) = \alpha \Leftrightarrow \forall\, x \in A, \text{有 } f(x) = \alpha; \tag{2}$$

$$\begin{cases} \{f = \alpha\} = \{x \in X : f(x) = \alpha\}, \\ \{f \neq \alpha\} = X\backslash\{f = \alpha\}; \end{cases} \tag{3}$$

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{f \neq 0\}}; \qquad \text{(支集)} \tag{4}$$

$$\begin{cases} A \prec f \Leftrightarrow f \in C(X,J) \text{ 且 } f(A)=1, \\ f \prec A \Leftrightarrow f \in C(X,J) \text{ 且 } \operatorname{supp} f \subset A^{\circ}. \end{cases} \tag{5}$$

其中 $J=[0,1]$(本节皆如此). 由式(5)所界定的记号为 W. Rudin 所倡用,它特别简单而又富有启发性,今后将多次使用.

对于 $A \subset X$, 若存在 $f \in C(X)$, 使得 $A=\{f=0\}$, 则称 A 为**零集**,而称 A^c 为**余零集**. 若 $X=\mathbf{R}^n$, f 是非零线性函数,则 $\{f=0\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的超平面;若 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上满足一定条件的连续可微函数,则 $\{f=0\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的超曲面;若 X 是度量空间, $f(x)=d(x,a)-r$, $a \in X$, $r>0$, 则 $\{f=0\}$ 是 X 中的球面,等等. 在一般拓扑空间中,不存在平面、曲面、球面等概念,而零集则可看作这些概念的替代物,余零集可看作球的替代物.

3.1.9 引理　设 $\varnothing \neq A \subset X$, 则以下条件互相等价:

(i) A 是零集(或余零集);

(ii) 存在 $f \in C(X,J)$, 使得 $A=\{f=0\}$(或 $A=\{f>0\}$);

(iii) 存在 $f \in C(X)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, 使得 $A=\{f \leqslant \alpha\}$(或 $A=\{f>\alpha\}$);

(iv) 存在 $f \in C(X)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, 使得 $A=\{f=\alpha\}$(或 $A=\{f \neq \alpha\}$).

证　显然只需证有关零集的结论.

(i)⇒(ii). 设 $A=\{g=0\}$, $g \in C(X)$. 令

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\arctan|g(x)| \quad (x \in X),$$

则 $f \in C(X,J)$, $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0$, 因而 $A=\{f=0\}$.

(ii)⇒(iii). 设 $f \in C(X,J)$, $A=\{f=0\}$, 则 $A=\{f \leqslant 0\}$.

(iii)⇒(iv). 设 $A=\{g \leqslant \alpha\}$, $g \in C(X)$. 令 $f=g \vee \alpha$(记号依 2.2 节式(9)),则 $f \in C(X)$,

$$g(x) \leqslant \alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha,$$

因而 $A=\{f=\alpha\}$.

(iv)⇒(i). 设 $A=\{g=\alpha\}$, $g \in C(X)$. 令 $f=g-\alpha$, 则 $f \in C(X)$, $A=\{f=0\}$. □

在引理3.1.9 所给出的对零集与余零集的诸刻画中,我们特别强调:若 $U \subset X$ 是余零集,则有 $f \in C(X,J)$, 使 $U=\{f>0\}$, $U^c=\{f=0\}$(或 $U=\{f<1\}$, $U^c=\{f=1\}$).

设 A,B 是两个非空集. 若存在 $f \in C(X)$, 使得

$$f(A)=\alpha \neq \beta=f(B), \tag{6}$$

则说 A 与 B 可**函数分离**,且说 f 分离 A 与 B. 函数分离条件式(6)可表成几种稍不同的等价形式.

3.1.10 引理　对非空集 $A,B \subset X$, 以下条件互相等价:

(i) A 与 B 可函数分离；

(ii) 存在 $f \in C(X)$，使得 $d(f(A), f(B)) > 0$（此处 d 是 $\mathbf{R}$ 上的Euclid 度量，记号依2.1 节式(24)）；

(iii) 存在 $f \in C(X, J)$，使得 $f(A) = 0, f(B) = 1$.

证　(i)⇒(ii)与(iii)⇒(i)是平凡的.

(ii)⇒(iii). 令 $M = f(A), N = f(B)$，定义

$$\varphi(x) = \frac{d(x, M)}{d(x, M) + d(x, N)} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

当条件(ii)满足时，$d(M, N) > 0$. 若 $d(x, M) = d(x, N) = 0$，则 $x \in \overline{M} \cap \overline{N}$（用2.1 节式(33)），这与 $d(M, N) > 0$ 矛盾. 故必有

$$d(x, M) + d(x, N) > 0,$$

因此 $\varphi \in C(\mathbf{R}, J)$（用例2.2.5(iv)）. 令 $g = \varphi \circ f$，则 $g \in C(X, J), g(A) = 0$, $g(B) = 1$，可见条件(iii)满足. □

作了以上准备之后，现在来考虑全正则性.

3.1.11 定义　设 X 是 T_2 空间. 若其中任一点与不含该点的非空闭集可函数分离，则说 X 满足 $T_{3\frac{1}{2}}$ **分离公理**或**全正则条件**，且称 X 为 $T_{3\frac{1}{2}}$ **空间**或**全正则空间**①.

下面给出全正则性的若干等价刻画. 与命题3.1.2 及命题3.1.6 不同，以下定理包含了一些真正深刻的结论.

3.1.12 定理　设 X 是 T_2 空间，则以下条件互相等价：

(i) X 是全正则空间；

(ii) $\forall\, x \in X, V \in \mathscr{N}_x, \exists\, f \in C(X)$，使得 $\{x\} \prec f \prec V$；

(iii) $\forall\, x \in X$，x 有由余零集构成的邻域基（⇔X 有由余零集构成的拓扑基）；

(iv) 存在 $F \subset C(X, J)$，使得如下映射是拓扑嵌入：

$$\begin{cases} e: X \to J^F, & x \to \tilde{x}, \\ \tilde{x}(f) = f(x) & (f \in F, x \in X), \end{cases} \tag{7}$$

上述映射 $e(\cdot)$ 称为**赋值映射**；

(v) 存在非空集 Ω，使得 X 可拓扑嵌入 J^{Ω}.

证　(i)⇒(ii). 设 X 是全正则空间，$x \in X, V \in \mathscr{N}_x$，不妨设 V 是开集. 因 x 与 V^c 可函数分离，故有 $g \in C(X, J)$，使 $g(x) = 0, g(V^c) = 1$（用引理3.1.10 (iii)）. 又 x 与 $\{g \geqslant 1/2\}$ 可函数分离，故有 $f \in C(X, J)$，使 $f(x) = 1, \{g \geqslant 1/2\} \subset \{f = 0\}$. 于是

---

① 此类空间首先由俄罗斯数学家 Tychonoff 系统研究，因而也称为 Tychonoff 空间.

$$\text{supp } f = \overline{\{f \neq 0\}} \subset \overline{\{g < 1/2\}}$$
$$\subset \{g \leqslant 1/2\} \subset V,$$

故有 $\{x\} \prec f \prec V$ (用式(5)).

(ii)⇒(iii). 设 $x \in X, V$ 是 x 的开邻域. 由条件(ii)有 $f \in C(X)$, 使 $\{x\} \prec f \prec V$. 于是 $U = \{f \neq 0\}$ 是余零集, $x \in U \subset V$. 这表明 x 有由余零集组成的邻域基.

(iii)⇒(iv). 取 $F = C(X,J)$, 今证映射(7)为拓扑嵌入. 若 $x, y \in X, x \neq y$, 则由 T_2 分离性及条件(iii), 有余零集 U, 使得 $x \in U, y \overline{\in} U$. 由引理 3.1.9, 有 $f \in F$, 使得 $U = \{f < 1\}, f(x) < 1 = f(y), \widetilde{x}(f) \neq \widetilde{y}(f)$, 从而 $\widetilde{x} \neq \widetilde{y}$. 故 $e(\cdot)$ 是单射. 设 $\{x_t\}$ 是 X 中的网, $x \in X$. 显然有

$$\begin{aligned} x_t \to x &\Rightarrow f(x_t) \to f(x) (\forall f \in F) \\ &\Rightarrow \widetilde{x}_t(f) \to \widetilde{x}(f) (\forall f \in F) \\ &\Rightarrow \widetilde{x}_t \to \widetilde{x}, \qquad \text{(用命题 2.3.7(iv))} \end{aligned}$$

这表明 $e(\cdot)$ 连续. 若 $x_t \not\to x$, 则结合条件(iii)与2.1 节式(9)有余零集 $V, x \in V$, 使得 $\forall t_0, \exists t \geqslant t_0 : x_t \overline{\in} V$. 取 $f \in F$, 使 $V = \{f < 1\}$ (用引理3.1.9). 于是 $f(x) < 1$, 但 $\forall t_0, \exists t \geqslant t_0$, 使 $f(x_t) = 1$, 这表明 $f(x_t) \not\to f(x)$, 从而 $\widetilde{x}_t \not\to \widetilde{x}$. 因此 $e(\cdot)$ 是拓扑嵌入(用推论 2.4.3).

(iv)⇒(v)是平凡的.

(v)⇒(i). 设有非空集 Ω 及拓扑嵌入

$$\varphi : X \to J^{\Omega}, \quad x \to \varphi_x.$$

任给非空闭集 $A \subset X$ 与 $x_0 \in A^c$. 等同 x 与 φ_x, 取 x_0 在 $\varphi(X)$ 中的如下开邻域:

$$U = \{x \in X : |\varphi_x(\omega_i) - \varphi_{x_0}(\omega_i)| < \varepsilon (1 \leqslant i \leqslant n)\}, \tag{8}$$

使得 $U \subset A^c$, 其中 $\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\} \subset \Omega, \varepsilon > 0$ (参照 2.3 节式(19)). 令

$$f(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\varphi_x(\omega_i) - \varphi_{x_0}(\omega_i)| \quad (x \in X).$$

由 φ 是拓扑嵌入推出 $f \in C(X), f(x_0) = 0$, 由 $A \subset U^c$ 与式(8)推出 $f(A) \geqslant \varepsilon$, 因此 x_0 与 A 可函数分离(用引理 3.1.10(ii)), 故 X 为全正则空间. □

定理 3.1.12 是一个值得赞赏的结果, 在给出它的丰富推论之前, 让我们作点简单评述. 在定理 3.1.12 对全正则性所作的多种等价刻画中, 最重要的是(iii)与(iv), 尤其是(iv)((v)则是(iv)的直接推论). 我们已提到, 余零集可看作球的某种替代物. 在这种理解下, 可以说命题 3.1.2(iii)表明了全正则空间是度量空间的某种推广. 看过定理 4.2.11 之后, 这一点将更加明确. 定理 3.1.12(iv)是我们所获得的第一个重要嵌入定理. 所谓**嵌入定理**, 就是断定某类空间(如全正则空间)可嵌入一种标准形式的空间(如 J^{Ω}, 特别是 J^{ω} 或 J^n). 一旦获得了这样的结果, 原则上, 对该类空间的研究就完全归结为对所提到的标准空间及其子

空间的研究.在这种意义上可以说,对于该类空间的拓扑结构就有了一个完全的描述.正因为如此,在拓扑空间理论中,嵌入定理有特别重要的意义.但嵌入定理的获得却远不是常有的事,它必然依赖于对空间的较强的假设.定理3.1.12的建立,正表明全正则性是一个较特殊的拓扑性质.

定理3.1.12有很丰富的推论,它们主要来自 J^F 或 J^Ω 的良好性质,今将主要者汇集于下.

3.1.13 推论　(i) 全正则空间是正则的.

(ii) 全正则性是遗传的与可乘的.

(iii) 若 X 是全正则空间,则 X 可拓扑嵌入某个连续函数空间 $C(\Omega)$, 此处 Ω 是某个拓扑空间,在 $C(\Omega)$ 中采用点态收敛拓扑.

(iv) 若 X 是全正则空间,则 X 中任一点与不含该点的闭集可用余零集分离.

证　(i) 只要指出,对任何非空集 Ω,J^Ω 的子空间均为正则空间(用命题3.1.7).

(ii) 遗传性是明显的.设 X 是全正则空间 $X_i(i \in I)$ 的积空间,取非空集 Ω_i, 使得 X_i 可嵌入 $J^{\Omega_i}(i \in I)$. 不妨设 Ω_i 互不相交(否则以 $\Omega_i \times \{i\}$ 取代 Ω_i), $\Omega = \bigcup \Omega_i$, 于是

$$\prod J^{\Omega_i} \cong J^\Omega \quad (\text{用 2.4 节式(2)}).$$

因此 X 可拓扑嵌入 J^Ω, 从而是全正则空间.

(iii) 取 $\Omega = C(X,J)$, 则3.1.12已指明

$$e: X \to J^\Omega, \quad x \to \tilde{x} \quad (\text{依式(7)})$$

为拓扑嵌入,其中 $\tilde{x}(f) = f(x)(f \in \Omega, x \in X)$. 在 Ω 中采用点态收敛拓扑,这意味着将 Ω 看作 J^X 的子空间.下面只要指明:对每个 $x \in X$, 有 $\tilde{x} \in C(\Omega)$. 任给网 $\{f_t\} \subset \Omega$ 与 $f \in \Omega$, 有

$$f_t \to f \Rightarrow f_t(x) \to f(x) \Rightarrow \tilde{x}(f_t) \to \tilde{x}(f),$$

这正表明 $\tilde{x} \in C(\Omega)$ (用命题2.2.2),如所要证.

(iv) 设 $A \subset X$ 为闭集, $x \in A^c$. 由定理3.1.12有 $f \in C(X)$, 使 $\{x\} \prec f \prec A^c$, 于是

$$x \in \{f > 1/2\} \triangleq U, \quad A \subset \{f < 1/2\} \triangleq V,$$

U 与 V 就是分离 x 与 A 的余零集.　□

推论3.1.13(iv)表明,全正则性其实也是一种邻域分离性,只是限于用余零集作为邻域.推论3.1.13(i)和(ii)是重要的,但毕竟是预料中的.推论3.1.13中颇不平凡的是结论(iii),它表明连续函数空间(其中用点态收敛拓扑)及其子空间已穷尽了所有全正则空间!将 X 拓扑嵌入 $C(\Omega)$ 的赋值映射 $e(\cdot)$ 也是值得注

意的，它联系着 $x(\in X)$ 的双重身份：一方面，x 是空间 X 中的点；另一方面，它又被看作 Ω 上的函数(即 $\widetilde{x}$). 等式 $\widetilde{x}(f)=f(x)(f\in\Omega, x\in X)$ 表明，f 与 x 的地位是可以互换的：x 作为 f 的函数就是 $\widetilde{x}$，而 f 作为 x 的函数则是 $C(X,J)$ 中的元. 这显示出二者之间的某种对偶关系. 值得注意的是，与此类似的方法在现代数学中颇具普遍意义.

再回到拓扑嵌入 $X\to J^{\Omega}$. 对于全正则空间 X，定理3.1.12 证明中仅指明了可取 $\Omega=C(X,J)$. 显然，我们希望 Ω 取得尽可能地“小”，而这与 X 的拓扑基的选择有关. 下面指出一个颇有意义的结果.

3.1.14 定理 X 是第二可数的全正则空间 $\Leftrightarrow X$ 可拓扑嵌入 J^{ω}，此处 ω 为无限可数基数.

证 J^{ω} 的子空间显然是第二可数的全正则空间(用定理 2.4.7 与命题 3.1.13(ii)). 下面设 X 是第二可数的全正则空间，证明 X 可拓扑嵌入 J^{ω}. 由定理3.1.12(iii)知 X 有由余零集构成的拓扑基；然后用定理 2.4.6(ii)知有可数个余零集 $\{U_n\}$ 构成 X 的拓扑基. 取 $f_n\in C(X,J)$，使 $U_n=\{f_n<1\}(n\in\mathbf{N})$. 仿照式(7)定义嵌入映射：

$$e: X\to J^{\omega},\quad x\to\widetilde{x}=(f_n(x)). \tag{9}$$

分析定理3.1.12 之证中(iii)⇒(iv)的证明，实际上已可看出式(9)是一个拓扑嵌入. 不过我们还是写出详细证明，以有助于你进一步熟悉这类证法. 若 $x,y\in X$，$x\neq y$，则由 X 的全正则性必有某个 U_n 含 x 而不含 y，于是 $f_n(x)<1=f_n(y)$，因而 $\widetilde{x}\neq\widetilde{y}$. 可见 $e(\cdot)$ 是单射. 若 $\{x_k\}$ 是 X 中的序列，$x\in X$ (注意 X 是第一可数空间，因而只要考虑序列)，则

$$\begin{aligned} x_k\to x &\Rightarrow f_n(x_k)\to f_n(x)(\forall\, n\in\mathbf{N})\\ &\Rightarrow (f_n(x_k))\to(f_n(x))\\ &\Rightarrow \widetilde{x}_k\to\widetilde{x} \qquad\qquad (k\to\infty), \end{aligned}$$

可见 $e(\cdot)$ 连续. 若 $x_k\not\to x$，则存在 x 的某个邻域 U_n，使得有某个子列 $\{x_{k_i}\}\subset U_n^c$. 于是 $f_n(x)<1=f_n(x_{k_i})$，从而 $f_n(x_k)\not\to f_n(x)(k\to\infty)$，因此 $\widetilde{x}_k\not\to\widetilde{x}$. 这证得 $e(\cdot)$ 为拓扑嵌入. □

定理3.1.14 表明，第二可数的全正则空间类，重合于 J^{ω} 的子空间之全体. 用拓扑学中的一个专门术语来说，就是 J^{ω} 是第二可数全正则空间的**万有空间**. 求得一类空间的万有空间，可不是常有的事. 由此足见定理3.1.14 的重要性，后面将看到它的一些极有价值的应用.

D. 正规空间

我们知道，正则空间就是“点与不含该点的闭集可邻域分离”的 T_2 空间. 若将以上表述中的点改成闭集，就得到本段将要考虑的正规空间. 正规性是本节要讨论的最强的一种分离性，它与前面所考察的三种分离性有较大的差别.

3.1.15 定义　设 X 是T_2空间. 若 X 中互不相交的闭集可邻域分离，则说 X 满足**T_4分离公理或正规性条件**，且称 X 为**T_4空间或正规空间**.

T_4分离公理也称为 Tietze 公理.

要举出一个正规空间的例子并不难，度量空间就是正规空间：设 X 是度量空间，$A,B \subset X$ 是互不相交的闭集，不妨设 $A,B \neq \varnothing$. 令

$$U = \{x \in X : d(x,A) < d(x,B)\},$$
$$V = \{x \in X : d(x,A) > d(x,B)\},$$

则 U 与 V 均为开集(用推论 2.2.4 与例 2.2.5(iv))，$U \cap V = \varnothing$，且 $A \subset U$，$B \subset V$ (用2.1 节式(33)). 可见 U 与 V 分离 A 与 B.

如同全正则空间一样，正规空间亦有一系列形式上差别颇大的等价刻画，其中一些刻画是很著名的拓扑定理，在拓扑学及其他领域都有重要应用. 为表述方便，下面约定一个缩记号：

$$A \subset\subset B \Leftrightarrow \overline{A} \subset B^{\circ}. \quad \text{(强包含)} \tag{10}$$

3.1.16 定理　对于T_2空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是正规空间；

(ii) 若 $A \subset\subset B \subset X$，则有开集 C，使 $A \subset\subset C \subset\subset B$；

(iii) X 中互不相交的非空闭子集 A,B 可函数分离；

(iv) $\varnothing \neq A \subset\subset B \subset X \Rightarrow \exists f \in C(X): A \prec f \prec B$ (记号依式(5))；

(v) 若 $f \in C(A)$，$A \subset X$ 是闭集，则 f 可扩张为 $g \in C(X)$，使得 $\|f\|_A = \|g\|$，此处约定

$$\|f\|_A = \sup_{x\in A}|f(x)|, \quad \|g\| = \|g\|_X. \tag{11}$$

证　(i)⇒(ii). 设 $A \subset\subset B$，则 $\overline{A}$ 与 $B^{\circ c}$ 是互不相交的闭集. 由 X 的正规性，有开集 C 与 D 分离 $\overline{A}$ 与 $B^{\circ c}$，于是

$$\overline{A} \subset C \subset \overline{C} \subset \overline{D^c} = D^c \subset B^{\circ},$$

即 $A \subset\subset C \subset\subset B$.

(ii)⇒(iii). 这是证明的关键步骤之一. 由 $A \subset B^c$ 及条件(ii)得出开集 $C_{1/2}$，使得 $A \subset C_{1/2} \subset\subset B^c$；同理又有开集 $C_{1/4}$ 与 $C_{3/4}$，使得(见图 3-4)

$$A \subset C_{1/4} \subset\subset C_{1/2} \subset\subset C_{3/4} \subset\subset B^c.$$

如此继续，对任何 $r = k2^{-n}(k = 1,2,\cdots,2^n - 1, n = 1,2,\cdots)$，得出开集 C_r，开集族 $\{C_r\}$ 满足条件：

$$A \subset C_r \subset\subset C_{r'} \subset\subset B^c \quad (r < r'). \tag{12}$$

约定 $C_1 = X$. 定义

$$f(x) = \inf\{r : x \in C_r\} \quad (x \in X),$$

则 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1, f(A) = 0, f(B) = 1$. 不难验证

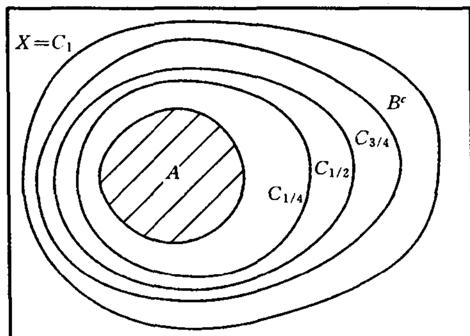


图 3-4

$$\{f<\alpha\}=\begin{cases}\varnothing, & \alpha\leqslant 0,\\ \bigcup\limits_{r<\alpha}C_r, & 0<\alpha\leqslant 1,\\ X, & \alpha>1;\end{cases}$$

$$\{f\leqslant\alpha\}=\begin{cases}\varnothing, & \alpha<0,\\ \bigcap\limits_{r>\alpha}\overline{C}_r, & 0\leqslant\alpha<1,\\ X, & \alpha\geqslant 1.\end{cases}$$

可见 $\{f<\alpha\}$ 与 $\{f\leqslant\alpha\}$ 分别为开集与闭集，因而 $f\in C(X)$（利用推论2.2.4）. 这就证得 f 分离 A 与 B.

(iii)⇒(iv). 设 $\varnothing\neq A\subset\subset B\subset X$. 由条件(iii)，$\overline{A}$ 与 $B^{\circ c}$ 可函数分离，故有 $g\in C(X,J)$，使得 $g(\overline{A})=0, g(B^{\circ c})=1$. 又 $\overline{A}$ 与 $\{g\geqslant 1/2\}$ 可函数分离，故有 $f\in C(X,J)$，使得 $f(\overline{A})=1, \{g\geqslant 1/2\}\subset\{f=0\}$. 于是

$$\operatorname{supp} f=\overline{\{f\neq 0\}}\subset\overline{\{g<1/2\}}$$
$$\subset\{g\leqslant 1/2\}\subset B^{\circ},$$

这表明 $A\prec f\prec B$.

你不妨将以上证明与定理 3.1.12 之证中(i)⇒(ii)的证明对照一下，两者几乎是一样的！

注意到显然有(iv)⇒(iii)，因此已确立(iii)⇔(iv).

(iii)⇒(v). 这是定理证明的另一个主要步骤. 设 $A\subset X$ 是闭集，$f\in C(A)$，不妨仅考虑 $\|f\|_A<\infty$ 的情况（对 $\|f\|_A=\infty$ 的情况只需附加适当连续变换），且不妨设 $\|f\|_A=1$，否则以 $f/\|f\|_A$ 取代 f. 令 $B_\pm=\{1/3\leqslant\pm f\leqslant 1\}$，则 B_+ 与 B_- 是 X 中互不相交的闭集，于是由条件(iii)有 $g_1\in C(X)$，使得 $g_1(B_\pm)=\pm 1/3$，且 $\|g_1\|\leqslant 1/3$ ①. 容易看出 $\|f-g_1\|_A\leqslant 2/3$. 对 (3/2)

① 例如，取 $\varphi\in C(X,J)$，使 $\varphi(B_-)=0, \varphi(B_+)=1$，然后令 $g_1=(2/3)(\varphi-1/2)$，则 g_1 即合于所求.

$(f-g_1)$ 应用已得结论，得出 $h_2 \in C(X)$，使得

$$\| h_2 \| \leqslant \frac{1}{3}, \quad \left\| \frac{3}{2}(f-g_1)-h_2 \right\|_A \leqslant \frac{2}{3}.$$

令 $g_2=(2/3)h_2$，则 $g_2 \in C(X)$，

$$\| g_2 \| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right), \quad \| f-g_1-g_2 \|_A \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

如此继续，可归纳地作出 $\{g_n\} \subset C(X)$，使得

$$\begin{cases} \| g_n \| \leqslant \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}, \\ \left\| f-\displaystyle\sum_{i=1}^{n} g_i \right\|_A \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \quad (n \in \mathbf{N}). \end{cases} \tag{13}$$

由式(12)推出级数 $\sum_1^\infty g_n$ 一致收敛，因而 $g \triangleq \sum_1^\infty g_n \in C(X)$ ①，且

$$\| g \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \| g_n \| \leqslant \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=1.$$

另一方面，从式(12)的后一式推出 $g|A=f$，因此 $\| g \| \geqslant \| f \|_A=1$，从而 $\| f \|_A = \| g \|$，这表明 g 是 f 的所要求的扩张.

(v)⇒(i). 设 $A,B \subset X$ 是互不相交的闭集，不妨设 $A,B \neq \varnothing$. 令 $E=A \cup B, f=\chi_B$，则 $f \in C(E)$ (用引理2.3.4). 由条件(v)，f 有扩张 $g \in C(X)$. 因 $g(A)=f(A)=0, g(B)=f(B)=1$，故开集 $\{g<1/2\}$ 与 $\{g>1/2\}$ 分离 A 与 B. 这表明 X 是正规空间. □

定理3.1.16的结论无疑不是平常的，现在让我们作点评述. 在定理3.1.16对正规性所作的几种等价刻画中，(ii)只是定义的简单推论，(iv)与(iii)的关系犹如定理3.1.12中(i)与(ii)的关系，亦无需过多注意. 真正深刻的刻画是(iii)与(v)，二者分别以 **Urysohn 定理**(1925)与 **Tietze 定理**(1923)著称，是拓扑空间理论中的重要结果之一. 刻画(iii)表明，对于闭集的邻域分离与函数分离实质上等价. 与此相对照，你知道点与闭集的邻域分离(正则性)与函数分离(全正则性)并不等价. 刻画(v)表明，正规空间的闭子空间上的连续函数总可连续地扩张到全空间上. 这一结论即使在很特殊的空间 $\mathbf{R}^n$ 甚至 $\mathbf{R}$ 上也不是显然的. 而(iii)⇔(v)意味着，闭集的函数分离性与闭集上连续函数的可扩张性原不过是一回事，而在表面上看来，二者的差别是很大的. 由此足见定理3.1.16的深刻性. 顺便指出，分离性与函数扩张性质之间的深刻内在联系是一个颇具普遍意义的问题，这一类的结果亦出现在抽象空间理论的其他领域.

定理3.1.16的证明方法也是高度富有启发性的. 在缺少具体结构的拓扑空

---

① 此处不加证明地用了似乎很熟悉的结论：一致收敛的连续函数序列(或网)的极限函数是连续函数(见习题50). 此结论本书后面还要用到.

间中,竟然也能完成连续函数的如此精巧的构造,你必定会不胜惊讶.为了感受一下所用论证的逻辑力量,你不妨尝试一下解决一个远为初等的问题:若 f 是定义于Cantor 集 P 上的连续函数,如何将它连续地扩张到$\mathbf{R}$ 上? 在作这件事时你首先想到的多半是Cantor 集的特殊构造,而对于定理 3.1.16(v)中的闭集 A 却未给出任何具体构造,仅仅利用空间的正规性,我们同样构成了 $f \in C(A)$ 的连续扩张!

由定理3.1.16 直接推出,正规空间是全正则空间(用定理3.1.16(iii)).因此正规空间必可拓扑嵌入到某个空间 J^{Ω}. 但并不能说明,凡可拓扑嵌入某个 J^{Ω} 的拓扑空间都是正规空间;否则,正规性就等同于全正则性了.在这个意义上,对于正规性缺少如同定理 3.1.12 那样的嵌入定理.在一定程度上正是这个原因,使得正规性在某些方面远不如全正则性那样便于处理.例如,正规性既不是遗传的,也不是可乘的,甚至不是有限可乘的:两个正规空间的积空间就未必是正规空间.在这些方面,正规性显示出其难以把握甚至病态的一面.鉴于度量空间总是正规空间,不可能在度量空间的范围内去寻找这种似乎属于病态的反例.本书并不打算深入考察这类问题.

如容易看到的,定理 3.1.16(iv)是定理 3.1.12(ii)的某种加强.因为用闭集 A 代替了定理 3.1.12(ii)中的点 x, 定理 3.1.16(iv)就不再是一个纯局部的结论,因而可作更有价值的应用.下面考虑一个非常简单的例子.

3.1.17 例　设 X 是正规空间,$f \in C(X)$,$A \subset X$ 是非空闭集. V 是 A 的开邻域,今要求一个 $g \in C(X)$, 使得

$$g|A = f|A, \quad \operatorname{supp} g \subset V.$$

利用定理3.1.16,上述问题的解法非常简单:取 $\varphi \in C(X)$, 使得 $A \prec \varphi \prec V$, 令 $g = \varphi f$, 则 g 显然已满足问题的要求(见图 3-5).

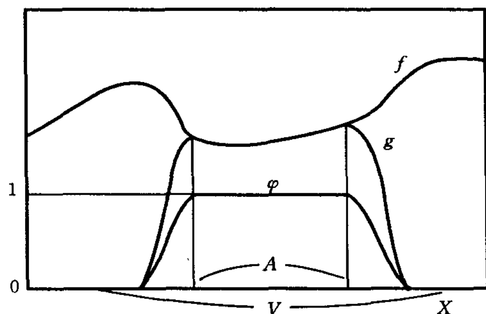


图 3-5

上述问题中的函数 g 称为 f 在 A 上的**截断函数**.如果我们仅关注 f 在 A 上的性质,则不妨以 g 取代 f. g 在 V 之外恒为零,这个优点不为 f 所具有.而且,

A 的邻域 V 可取得尽可能地“小”,这意味着 V 尽可能地接近于集 A. 你或许会认为,以特征函数 χ_A 取代 φ 构成 $g = f\chi_A$, 同样有

$$f|A = g|A, \quad \operatorname{supp} g \subset V.$$

但这样一来,g 一般就不连续了. 实际上,满足 $A \prec \varphi \prec V$ 的 φ 正是对函数 χ_A 的一个**连续逼近**;V 愈“接近于” A,φ 对 χ_A 的逼近就愈好. 而由定理3.1.16,存在这种性质的逼近,正是正规空间的本质特征.

正则空间未必是正规空间. 但如果正则性加上第二可数性,就足以推出正规性,这构成以下定理的结论.

3.1.18 定理　若 X 是第二可数的正则空间,则 X 是正规空间.

证　设 A,B 是 X 中互不相交的闭集,今要求出分离 A 与 B 的一对开集. 可设 $A,B \neq \varnothing$. 取 X 的可数拓扑基 $\mathscr{B}$,令

$$\mathscr{U} = \{U \in \mathscr{B} : A \cap U \neq \varnothing, \overline{U} \subset B^c\}.$$

$\forall\, x \in A$, 因 B^c 是 x 的开邻域,故必有 $U \in \mathscr{B}$, 使 $x \in U, \overline{U} \subset B^c$ (此处用到正则性!),这样的 U 必属于 $\mathscr{U}$. 因此 $\mathscr{U} \neq \varnothing$ 且 $A \subset \mathscr{U}^{\#}$. 以下设 $\mathscr{U} = \{U_n\}$. 同理可求得 $\mathscr{V} = \{V_n\} \subset \mathscr{B}$, 使得 $B \subset \mathscr{V}^{\#}, \overline{V_n} \subset A^c$. 现在令

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(U_n \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{n}\overline{V}_i\right),$$

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(V_n \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{n}\overline{U}_i\right),$$

显然 U,V 皆为开集,也容易看出 $U \cap V = \varnothing$. 下面只要证 $A \subset U$ (同理将有 $B \subset V$, 因而 U 与 V 分离 A 与 B). 任给 $x \in A$, 必有某个 U_n 含 x. 因当 $1 \leqslant i \leqslant n$ 时 $x \in A \subset (\overline{V}_i)^c$, 故

$$x \in U_n \Big\backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{V}_i\right) \subset U,$$

如所要证.　□

对于正规性,我们似乎已谈得很多了. 关于正规性的最基本的结论,大致就是这些. 若就正规空间理论的深入展开而言,则要走的路还很长,不是本书所宜过多涉足的. 但为后面的需要,至少还得介绍一个结果,它虽然不像定理 3.1.16 中那些内容一样属于最基本的结论,但其所依据的思想仍是基本的、易于理解的. 不过,你在初次阅读时也不妨跳过下面这一段,这并不影响学习本章其他部分的内容.

E. 单位分解

让我们暂时离开正规性的讨论,考虑一个不无趣味的问题. 给定一个函数 $f : X \to \mathbf{R}$, 如何将对 f 的考察转化为在 X 的某些子集上“分块”考察? 一个看来最简单的方案是:将 X 适当地分解为一个不交并: $X = \bigcup A_i$, 令 $f_i = f\chi_{A_i}$, 则得

到如下分解：

$$f=\sum_i f\chi_{A_i}=\sum_i f_i, \tag{13}$$

其中每个 f_i 在 A_i^c 上皆为零，因而只需在 A_i 上考虑 f_i 就够了. 你立即会注意到，以上方法有一个严重缺点，即 χ_{A_i} 一般是不连续的，因而即使 $f\in C(X)$，也未必有 $f_i\in C(X)$. 受例3.1.17 的启发，易想到的补救办法是：以 χ_{A_i} 的某个"连续逼近" φ_i 取代 χ_{A_i}. 为了得到类似于式(13)的分解式，自然要求 $\{\varphi_i\}$ 满足 $\sum\varphi_i\equiv 1$；为使对 φ_i 的考察能限制在某个预定的范围内，还要求支集 supp φ_i（参看式(4)）含于某个预定的集. 这样的 $\{\varphi_i\}$ 就是本段所要考虑的单位分解. 单位分解在现代数学的多个领域有着重要应用，因而是一个极有价值的工具. 依需要的不同，单位分解的形式亦互有差异. 下面仅考虑一种最简单的情况.

3.1.19 定义 设 $\mathscr{U}=\{U_i:1\leqslant i\leqslant n\}$ 是 X 的一个开覆盖，即 $U_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 均为开集且 $X=\bigcup U_i$，$\Phi=\{\varphi_i:1\leqslant i\leqslant n\}\subset C(X,J)$. 若 Φ 满足条件：

(i) $\sum\limits_i\varphi_i=1$，

(ii) supp $\varphi_i\subset U_i(1\leqslant i\leqslant n)$，

则称 Φ 为 X 上从属于开覆盖 $\mathscr{U}$ 的一个**单位分解**.

亦可以考虑从属于无限开覆盖的单位分解，但本书不拟处理这种更一般的情况了.

定义3.1.19 并不涉及拓扑空间 X 的任何特殊的拓扑性质. 但是单位分解的存在却不是一件很寻常的事，下面指出它依赖于空间的正规性.

3.1.20 定理 设 X 是一个 T_2 空间，则 X 是正规空间 $\Leftrightarrow$ 对 X 的任何有限开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_i:1\leqslant i\leqslant n\}$，$X$ 上存在从属于 $\mathscr{U}$ 的单位分解.

证 首先设 X 是正规的，$\mathscr{U}=\{U_i:1\leqslant i\leqslant n\}$ 是 X 的开覆盖. 令 $A_1=(\bigcup_2^n U_i)^c$，则 A_1 是闭集且 $A_1\subset U_1$，于是有开集 V_1，使得 $A_1\subset V_1\subset\subset U_1$（用定理 3.1.16(ii)). 因 $\{V_1,U_2,\cdots,U_n\}$ 是 X 的开覆盖，重复上面的论证可得出开集 V_2，使得 $\overline{V}_2\subset U_2$，且 $\{V_1,V_2,U_3,\cdots,U_n\}$ 是 X 的开覆盖. 如此一直作下去，直到得出开集族 $\mathscr{V}=\{V_i:1\leqslant i\leqslant n\}$，使得 $\overline{V}_i\subset U_i(1\leqslant i\leqslant n)$，且 $X=\mathscr{V}^\#$. 由 X 的正规性，有 $f_i\in C(X)$，使得 $V_i\prec f_i\prec U_i$，$1\leqslant i\leqslant n$（用定理3.1.16(iv)). 令 $f=\sum f_i$，则 $f\in C(X)$，由 $X=\mathscr{V}^\#$ 及 $f_i(V_i)=1$ 得出 $f>0$. 于是 $\varphi_i\triangleq f_i/f\in C(X,J)$，$\sum\varphi_i=1$，supp $\varphi_i=$ supp $f_i\subset U_i$. 可见 $\{\varphi_i:1\leqslant i\leqslant n\}$ 是 X 上从属于 $\mathscr{U}$ 的单位分解.

反之，设 X 的任何有限开覆盖有从属于它的单位分解，今证 X 是正规空间. 设 $A,B\subset X$ 是互不相交的非空闭集，则 $\mathscr{U}=\{A^c,B^c\}$ 是 X 的一个开覆盖. 取 X 上从属于 $\mathscr{U}$ 的单位分解 $\{f,g\}$，则

$$\operatorname{supp} f \subset A^c \Rightarrow f(A) = 0;$$

同理有 $g(B) = 0$，因而由 $f + g = 1$ 推出 $f(B) = 1$，这表明 f 分离 A 与 B. 故 X 是正规空间. □

在讨论一定函数空间的可分性时，将用到定理3.1.20(参看定理4.3.3).

3.2 紧 性

在上节中，你已接触到某些有一定深度的拓扑定理. 但我们一直因其不能推广于拓扑空间而深以为憾的那些经典定理，特别是关于连续函数的极值定理，却仍然未曾触及. 这就表明，除了分离性之外，还需考虑应附加到拓扑空间的另外一些假设，最重要者就要数紧性了，这正是本节所要考虑的.

如同分离性一样，紧性也不是一个单一的拓扑性质，而是一系列相近拓扑性质的总称. 在这个意义上，关于紧性的理论是庞大而复杂的，它占据了拓扑空间理论的一个相当大的部分，其重要性是无庸置疑的. 不过，本节仅涉及比较基本的内容，这部分内容与我们熟知的许多经典定理(如有限覆盖定理与聚点原理)有比较直接的联系，因而较容易理解与运用；而且，在应用上也是最重要的.

A. 紧性的刻画

对紧性一词可作两种理解：其一是泛指加了前辍修饰的诸多紧性中的任何一种，包括序列紧、可数紧、聚点紧等；其二是专指严格意义上的紧性，此处要考虑的正是后者，它无疑处于最主要的地位.

紧性的原型是由熟知的有限覆盖定理所揭示的性质. 为表述所需的定义，首先交待若干与覆盖有关的术语. 实际上，我们已用过覆盖这一术语了，此处只是说得更明确且更全面些罢了. 若 $\mathscr{A} \subset 2^X$，$\mathscr{A}^\# = X$，则称 $\mathscr{A}$ 为 X 的一个覆盖. 设 $\mathscr{A}$ 是 X 的覆盖. 若 $\mathscr{A}$ 含有限个集(或无限个集、可数个集)，则称 $\mathscr{A}$ 为有限覆盖(或无限覆盖、可数覆盖)；若 $\mathscr{A}$ 中的集均为开集(或闭集)，则称 $\mathscr{A}$ 为开覆盖(或闭覆盖). 若 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ 且 $\mathscr{A}^\# = X$，则称 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{B}$ 的子覆盖；含有限(或可数)个集的子覆盖称为有限(或可数)子覆盖. 若 $A \subset \mathscr{A}^\#$，则称 $\mathscr{A}$ 为集 A 的覆盖. 上面关于覆盖的种种术语，同样可用到集 A 的覆盖.

若 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 是 X 的一个开覆盖，则涉及全空间 X 的问题有可能分别在各个 U_α 上考虑，然后通过某个综合手续得出一个关于全空间的总体结论. 这就提供了一个从局部性质过渡到整体性质的途径. 但从局部到整体的综合是否容易完成，则往往取决于 $\mathscr{U}$ 是否为有限覆盖. 因此，某种有限开覆盖的存在性，常常成为许多问题获得解决的关键. 这就引导到以下定义.

3.2.1 定义 设 $A \subset X$. 若 A 在 X 中的每个开覆盖有有限子覆盖，则称 A

为**紧集**；若 $\overline{A}$ 为紧集，则称 A 为**相对紧集**. 若 X 本身为紧集，则称 X 为**紧空间**.

紧空间与紧集概念是俄罗斯数学家 Alexandroff 与 Urysohn 于 1924 年引进的，它与分析中的有限覆盖定理的联系是显而易见的. 实际上，依据定义 3.2.1，通常的有限覆盖定理无非是说：$\mathbf{R}$ 上的有限闭区间是紧集[①]. 另一方面，我们也可以将定义 3.2.1 换一种说法：紧集（或紧空间）**就是使有限覆盖定理得以成立的点集**（或拓扑空间）. 既然如此，我们就自然期望那些基于通常有限覆盖定理的论证，亦可应用于任何紧集或紧空间. 有限覆盖定理在分析学及其相关领域的深刻应用是众所周知的. 这就不难设想，紧集概念将有重要的应用，你将看到事实正是如此.

设 $A \subset X$，$\mathscr{U}$ 是 A 的开覆盖，则

$$\mathscr{U}_A \triangleq \{A \cap U : U \in \mathscr{U}\}$$

是 A 的由相对开集组成的覆盖. 这就表明，"A 是紧集"与"A 作为 X 的子空间是紧空间"是一致的. 因此，紧集与紧空间在概念上是统一的；凡对于紧空间得出的结论，均可用于紧集，反之亦然. 这样，下面的讨论不妨仅对紧空间展开.

紧性概念的背景让人将紧空间与闭区间一类的对象联系起来，这种联想自然过于简单化. 我们将看到，紧空间可能具有极其多样的形态. 就目前而言，除了定义 3.2.1 所赋予的意义之外，对于紧空间应是什么样子，确实别无所知. 这就有必要给出紧性的一些等价刻画，使我们能从多个不同的角度来观察紧性，从而获得更好的理解. 以下定理汇集了对于紧性的一些最常用的刻画.

3.2.2 定理　对于拓扑空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是紧空间；

(ii) 对 X 的任何（或某个）拓扑子基 $\mathscr{B}$，若 $\mathscr{B}$ 的某个子族覆盖 X，则它必有有限子覆盖；

(iii) X 中任何有限相交的闭集族有非空交；

(iv) X 中的任何网有收敛子网.

如同定理 3.1.12 与定理 3.1.16 一样，定理 3.2.2 是本书中最深刻的定理之一，其证明是有点难的. 在初次阅读时，读者不妨跳过下面的证明.

证　证明的路线是：(ii)⇔(i)⇔(iii)⇔(iv).

(i)⇔(ii). (i)⇒(ii)是平凡的，(ii)⇒(i)之证则颇不容易，且需用到极大原理. 今设条件(ii)满足，但 X 不是紧空间，下面引出矛盾. 以 Σ 记 X 的不含有限子覆盖的开覆盖之全体，则 Σ 依关系 $\subset$ 是一半序集（参考例 1.2.2(ii)）. 若 Σ_1 是 Σ 的全序子集，则

---

① 你会注意到，在通常有限覆盖定理的表述中，覆盖区间 $[a,b]$ 的是一族开区间，并未涉及开集. 不过，依定理 3.2.2(ii)，这一差别并不重要.

$$\mathscr{U}=\bigcup\{\mathscr{A}:\mathscr{A}\in\Sigma_1\}$$

显然是 X 的开覆盖. $\mathscr{U}$ 必无有限子覆盖(从而 $\mathscr{U}\in\Sigma$). 否则有 $U_i\in\mathscr{U}(1\leqslant i\leqslant n)$, 使 $X=\bigcup U_i$. 设 $U_i\in\mathscr{A}_i\in\Sigma_1(1\leqslant i\leqslant n)$, 不妨设 $\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}_2\subset\cdots\subset\mathscr{A}_n$, 但这得出 $\{U_i\}$ 是 $\mathscr{A}_n$ 的有限子覆盖,这与 $\mathscr{A}_n\in\Sigma$ 相矛盾. 因此, $\mathscr{U}$ 是 Σ_1 在 Σ 中的一个上界. 由极大原理1.2.5, Σ 必有一极大元 $\mathscr{A}$, 即 $\mathscr{A}$ 是 X 的不含有限子覆盖的极大开覆盖. 由条件(ii) 有 X 的拓扑子基 $\mathscr{B}$, 使得用 $\mathscr{B}$ 中的集作成的 X 的覆盖必含有限子覆盖. 令 $\mathscr{U}=\mathscr{A}\cap\mathscr{B}$, 今证 $\mathscr{U}^{\#}=X$ (这将推出 $\mathscr{U}$ 有有限子覆盖,从而 $\mathscr{A}$ 有有限子覆盖,与 $\mathscr{A}\in\Sigma$ 相矛盾). 取定 $x\in X$. 因 $x\in\mathscr{A}^{\#}$, 故有 $A\in\mathscr{A}$ 使 $x\in A$. 因 $\mathscr{B}$ 是拓扑子基,故有有限个 $B_i\in\mathscr{B}$, 使 $x\in\bigcap B_i\subset A$. 今证某个 $B_i\in\mathscr{A}$ (如此则有 $B_i\in\mathscr{U}$, 从而 $x\in\mathscr{U}^{\#}$). 反设每个 $B_i\overline{\in}\mathscr{A}$, 则 $\mathscr{A}_i\triangleq\mathscr{A}\cup\{B_i\}$ 是真包含 $\mathscr{A}$ 的开覆盖. 由 $\mathscr{A}$ 的极大性推出 $\mathscr{A}_i\overline{\in}\Sigma$, 于是每个 $\mathscr{A}_i$ 有有限子覆盖 $\mathscr{C}_i$. 不妨设 $\mathscr{C}_i=\mathscr{B}_i\cup\{B_i\}$, $\mathscr{B}_i\subset\mathscr{A}$, 于是

$$\begin{aligned}X&=\bigcap_i\mathscr{C}_i^{\#}=\bigcap_i(\mathscr{B}_i^{\#}\cup B_i)\\&\subset\Big(\bigcup_i\mathscr{B}_i^{\#}\Big)\cup\Big(\bigcap_i B_i\Big)\\&\subset\Big(\bigcup_i\mathscr{B}_i^{\#}\Big)\cup A,\end{aligned}$$

这表明 $\{A\}\cup\Big(\bigcup_i\mathscr{B}_i\Big)$ 是 $\mathscr{A}$ 的有限子覆盖,得出矛盾.

注意以上论证中对于反证法的运用很值得你仔细体会:整体来说证明采用了反证法,而证明过程中又两次局部地用了反证法,因而显得有点迂回曲折.

(i)⇔(iii)是明显的,只要注意 X 的开覆盖 $\mathscr{A}$ 无有限子覆盖⇔$\mathscr{A}'$ (记号依1.1节式(25))是有限相交的闭集族且 $\bigcap\mathscr{A}'=\varnothing$.

(iii)⇔(iv). 首先设条件(iii)满足. 设 $\{x_t:t\in T\}\subset X$ 是一个网,今要证 $\{x_t\}$ 有收敛子网. $\forall t\in T$, 令 $A_t=\{x_s:s\geqslant t\}$, 则 $\{\overline{A}_t:t\in T\}$ 是 X 中有限相交的闭集族,"有限相交性"由 T 的有向性推出. 由条件(iii), 有 $x\in\bigcap\overline{A}_t$, 今说明 x 是 $\{x_t\}$ 的某个子网之极限. 已知 $\mathscr{N}_x$ 以⊃为序是一有向集,在 $\Delta=T\times\mathscr{N}_x$ 中规定

$$(t,U)\leqslant(s,V)\Leftrightarrow t\leqslant s,U\supset V,$$

则 Δ 是一个有向集(参考例1.2.2(iii)、(vi)). $\forall\delta=(t,U)\in\Delta$, 由 $x\in\overline{A}_t$ 推出 $A_t\cap U\neq\varnothing$, 从而有 $s\geqslant t$, 使 $x_s\in U$. **取定一个**这样的 s, 并记 $s=t_\delta$, 则 $\{t_\delta:\delta\in\Delta\}$ 是 T 中的一个网,且 $t_\delta\geqslant t, x_{t_\delta}\in U$. $\forall t^*\in T$, 取 $U^*\in\mathscr{N}_x$, 令 $\delta^*=(t^*,U^*)$. 若 $\delta=(t,U)\geqslant\delta^*$, 则 $t_\delta\geqslant t\geqslant t^*$. 可见2.1节中的条件(8)满足,因而 $\{x_{t_\delta}\}$ 是 $\{x_t\}$ 的一个子网. $\forall U_0\in\mathscr{N}_x$, 取 $t_0\in T$, 令 $\delta_0=(t_0,U_0)$. 若 $\delta=(t,U)\geqslant\delta_0$, 则 $x_{t_\delta}\in U\subset U_0$. 这表明 $x_{t_\delta}\to x$ (用2.1节式(7)').

其次设条件(iv)满足，$\mathscr{A}$ 是 X 中有限相交的闭集族，今证 $\bigcap \mathscr{A} \neq \varnothing$. 不妨设 $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$（否则以 $\mathscr{A}^*$ 代替 $\mathscr{A}$），则 $\mathscr{A}$ 依 $\supset$ 是一有向集（参看例1.2.2(iii)）. $\forall A \in \mathscr{A}$，取 $x_A \in A$，则 $\{x_A : A \in \mathscr{A}\}$ 是一个网. 由条件(iv)，$\{x_A\}$ 有一收敛子网 $\{x_{A_\delta} : \delta \in \Delta\}$. 设 $x_{A_\delta} \to x$，今证 $x \in \bigcap \mathscr{A}$，为此只要对任给 $A \in \mathscr{A}$ 证 $x \in A$. 固定 $A \in \mathscr{A}$. 由2.1节式(8)，$\exists\, \delta_0 \in \Delta, \forall\, \delta \geqslant \delta_0$，有 $A_\delta \subset A$，从而 $x_{A_\delta} \in A_\delta \subset A$，即 $\{x_{A_\delta} : \delta \geqslant \delta_0\} \subset A$，这推出 $x \in A$，如所要证. □

现在让我们来看看定理3.2.2所给出的条件对于紧性的研究能起什么作用. 如我们在证明中已看到的，条件(iii)只能看作紧性定义的一种改写，不必特别介意. 至于条件(ii)与(iv)，仅从证明的难度也可以推想，其价值应当非同一般，下面分别作点说明.

首先，条件(ii)使得有可能大大简化紧性的判定. 试看下面这个简单例子：为对 $X = [a,b]$ 证明有限覆盖定理，依定理3.2.2(ii)只要证明：从 X 的如下开覆盖

$$\mathscr{U} = \{(-\infty, \beta_i) : i \in I\} \cup \{(\alpha_j, \infty) : j \in J\}$$

可取出有限子覆盖，其中 $\beta_i > a, \alpha_j < b$. 令 $\alpha = \inf\limits_j \alpha_j, \beta = \sup\limits_i \beta_i$，则必 $\alpha < \beta$（若 $\alpha \geqslant \beta$，则必有 $x \in X$，使 $\alpha \geqslant x \geqslant \beta$，这使 $x \overline{\in} \mathscr{U}^{\#}$！）. 于是有 $i \in I, j \in J$，使得 $\alpha \leqslant \alpha_j < \beta_i \leqslant \beta$，可见

$$X \subset (-\infty, \beta_i) \cup (\alpha_j, \infty).$$

你不妨将以上论证与有限覆盖定理的传统证法对比一下，看何者更简单. 如果这个例子还不足以说明问题，那么在后面将看到更具说服力的例子（例如定理3.2.4(ii)之证）.

再看定理3.2.2中的条件(iv)，它一定会使你想起如下经典定理：有界数列必有收敛子列(Bolzano-Weierstrass 定理). 为简化表述，约定如下术语：一序列的子列之极限称为该序列的**聚点**（或极限点）. 于是 Bolzano-Weierstrass 定理可表为：有界序列必有聚点. 或等价地，闭区间中任何序列在该区间中有聚点. 鉴于此，Bolzano-Weiestrass 定理又可简称为**聚点原理**[①]. 如果推广上面的术语，称一个网的子网之极限为该网的聚点，则定理3.2.2(iv)可表为：X 中的任何网皆有聚点. 进而可以说，**紧空间正是使聚点原理成立的拓扑空间**. 这就表明，通过紧空间这一概念，实现了有限覆盖定理与聚点原理的某种统一. 这不能不说是拓扑空间理论的一项重要成就，它给人的印象是异乎寻常的. 唯一不能令人满意的是，在定理3.2.2(iv)中使用网而不是序列，这确实带来不便. 不过，对于紧性的许多应用来说，真正重要的是"收敛子网的存在性"，至于这种子网如何构成及是否便

---

① Bolzano-Weierstrass 聚点原理通常指：**R** 中的有界无限集必有聚点. 但容易看出，这正好等价于：有界数列必有收敛子列.

于运用，都未必是要紧的. 试看如下简单例子.

3.2.3 推论 T_2 空间中的紧集是闭集.

证 设 A 是 T_2 空间 X 中的紧集，今证 A 是闭集. 为此，只要对任给 $x \in \overline{A}$，证 $x \in A$. 取 A 中的网 $\{x_t\}$，使得 $x_t \to x$ (用2.1节式(20)). 另一方面，由 A 的紧性，$\{x_t\}$ 有收敛子网 $\{x_{t_\delta}\}$，使得 $x_{t_\delta} \to y \in A$. 而由 $x_t \to x$ 推出 $x_{t_\delta} \to x$. 由 T_2 空间中极限的唯一性，必定 $x = y \in A$，如所要证. □

为方便起见，不妨将在定理3.2.2(iv)的形式下运用紧性的论证简称为**收敛子网论证**. 一般来说，收敛子网论证是非常方便的，往往能对一些不平凡的结果给出最简洁的证明，因而特别令人偏爱. 今后你将看到一些更有说服力的例子.

B. 涉及紧性的其他结论

首先考虑不变性问题，以下结论足以令人满意.

3.2.4 定理 (i) 紧性是闭遗传的，即紧空间的闭子集必为紧集.

(ii) 紧性是可乘的，即任一族紧空间的积空间为紧空间.

(iii) 紧性在连续映射下保持不变，即连续映射将紧集映为紧集.

(iv) 紧性是有限可加的，即有限个紧集的并是紧集.

证 利用收敛子网论证，结论(i)，(iii)与(iv)的证明是平凡的. 但为了进一步展示方法的特点，我们还是写出(i)与(iii)的证明细节，以供你琢磨体会. 首先设 A 是紧空间 X 的闭子集. 任给 A 中的网 $\{x_t\}$，由 X 的紧性，必有收敛子网 $\{x_{t_\delta}\}$. 设 $x_{t_\delta} \to x \in X$. 因 A 是闭集，必有 $x \in A$，因而 A 是紧集. 其次设 $F \in C(X,Y)$，X 是紧空间. 任给 FX 中的网 $\{y_t\}$，可设 $y_t = Fx_t, x_t \in X$. 由 X 的紧性，有 $\{x_t\}$ 的收敛子网 $\{x_{t_\delta}\}$，设 $x_{t_\delta} \to x \in X$，则 $y_{t_\delta} = Fx_{t_\delta} \to Fx \in FX$. 可见 FX 是紧的.

至于结论(ii)的证明，原则上不可避免地要用到某种超限程序，因而远不是平凡的. 不过，有了定理3.2.2中的条件(ii)之后，这一证明已不困难了. 可以说，关键的障碍已在定理3.2.2中证(ii)⇒(i)时扫除了.

设 X 是紧空间 $(X_i, \tau_i)(i \in I)$ 的积空间，$P_i: X \to X_i$ 为投影. 依定理3.2.2(ii)，为证 X 为紧空间，只要对 X 的任一开覆盖 $\mathscr{B} \subset \bigcup P_i^{-1}\tau_i$，指明 $\mathscr{B}$ 有有限子覆盖(参考定义2.3.6). $\mathscr{B}$ 可表成 $\mathscr{B} = \bigcup P_i^{-1}\mathscr{B}_i, \mathscr{B}_i \subset \tau_i (i \in I)$. 必有某个 $\mathscr{B}_i$ 覆盖 X_i. 否则，$\forall\, i \in I$，有 $x_i \in X_i \backslash \mathscr{B}_i^{\#}$. 令 $x = (x_i)$，则 $x \in \mathscr{B}^{\#}$，故有 $i \in I, B_i \in \mathscr{B}_i$，使得 $x \in P_i^{-1}B_i$，从而 $x_i \in B_i$，这与 $x_i \overline{\in} \mathscr{B}_i^{\#}$ 相矛盾. 于是可取定 $i \in I$，使得 $\mathscr{B}_i$ 覆盖 X_i. 因 X_i 是紧空间，故有 $\mathscr{B}_i$ 的有限子族 $\mathscr{A}_i$ 覆盖 X_i，而这推出 $P_i^{-1}\mathscr{A}_i$ 是 $\mathscr{B}$ 的有限子覆盖，如所要证. □

定理3.2.4中最重要的结论无疑是紧性的可乘性，它以 **Tychonoff 定理**(1930)著称，可以说是拓扑学中最重要的基本结果之一，其应用与影响甚至远远

超出拓扑学之外. Tychonoff 定理的证法甚多,其中任何一种证法都不能实质上避开选择公理①. 注意,定理 3.2.4(ii)之证的一个关键依据是定理 3.2.2 中的(ii),而后者的证明正是基于与选择公理等价的极大原理.

其次也可注意到,定理 3.2.4(iii)肯定了紧性在连续映射下的不变性. 就紧性与连续映射的关系而言,这已是最好的结果了. 除了可分性之外(参看定理 2.4.13),我们已介绍过的拓扑性质,如第一与第二可数性及 $T_i(i=2,3,3\frac{1}{2},4)$ 分离性,都无此结果. 一般地,若一个拓扑性质 P 在连续映射下保持不变,则必在空间的拓扑减弱之后保持不变:若 τ,τ_1 是 X 上的两个拓扑, $\tau\supset\tau_1$, 则 $1_X:(X,\tau)\to(X,\tau_1)$ 必定连续(用定理 2.2.3(ii)). 因此可以说, P 更可能对较小的拓扑成立. 例如,可分性、紧性及下节将论及的连通性,就属于这种拓扑性质. 而分离性则恰好相反,更可能为较强的拓扑所具有. 在极端情况下,平凡拓扑空间总是可分的、紧的(也是连通的,参看 3.3A),而离散拓扑空间则总是正规的. 在这一点上,紧性(及连通性)与分离性似乎截然对立,这是你在理解这些拓扑性质时不可不注意到的.

定理 3.2.4 有多种多样的应用,但其核心应用是用来获得紧集或紧空间. 你必定注意到,到目前为止,我们所知的紧集或紧空间的例子并不多. 直接应用定理 3.2.2 来判定紧性,即使可行也很少是方便的. 获得紧集或紧空间的最有效的途径是:从少数已知的紧集(如闭区间)出发,利用定理 3.2.4 轻而易举地构成大量新的紧集或紧空间. 下面是一些随手举出的例子.

(i) 紧方体 J^{Ω}, 此处 $J=[a,b]$, Ω 是任一非空集.

(ii) 紧方体 J^{Ω} 的任何闭子集,特别, $\mathbf{R}^n$ 中的任何有界闭集($\mathbf{R}^n$ 中的有界集总包含于某个方体 J^n 之内). 容易看出, $\mathbf{R}^n$ 中的紧集只能是有界闭集.

(iii) S^n (依 2.3 节式(22));一般地, $\mathbf{R}^n$ 中任何有界集的边界.

(iv) $T^n, S^n\times S^1, S^n\times S^n$ 等.

(v) 任何紧空间的商空间,如 Klein 瓶(依 2.3 节式(31)),投影平面(依 2.3 节式(32))等.

读者不妨自己举出一些紧集的例子.

一旦确定了连续映射映紧集为紧集,又可以对映射本身作出某些有价值的结论. 特别,对于定义于紧空间上的连续映射,可建立以下结果.

3.2.5 命题　设 X 是紧空间, Y 是 T_2 空间.

(i) 设 $F\in C(X,Y)$, 则 F 是闭映射,因而 $F:X\to FX$ 是商映射;若 F 是连续双射,则 F 为同胚.

(ii) 设 $f\in C(X)$, 则 f 在 X 上取得最大值与最小值.

① Kelley(1950)证明了,选择公理可从 Tychonoff 定理推出.

证　(i) 若 $A \subset X$ 是闭集，则 A 为紧集(用定理3.2.4(i))，因而 FA 是紧集(依定理3.2.4(iii))，再用 Y 的 T_2 分离性得出 FA 为闭集(用推论3.2.3)，这表明 F 是闭映射. 其余结论由命题2.3.14与命题2.4.2推出.

(ii) 因 $f(X)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的紧集，即有界闭集，故其上确界与下确界分别为 $f(x)$ 在 X 上的最大值与最小值. □

命题3.2.5的结论(ii)正是经典的Weierstrass定理——闭区间上的连续函数取得最大值与最小值——在紧空间上的推广，而这正是我们期待已久的. 鉴于这一结果的重要性，下面给出一个不依赖于定理3.2.4(iii)的直接证明，这也是收敛子网论证的一次有趣应用. 令 $\beta = \sup\limits_{x\in X} f(x)$. 由上确界的性质，必有序列 $\{x_n\} \subset X$，使得 $f(x_n) \to \beta$(注意此处无需预先假定 $\beta < +\infty$，这是要点!). 由 X 的紧性，$\{x_n\}$ 必有收敛子网 $\{x_{n_\delta}\}$(注意，即使 $\{x_n\}$ 本身为序列，此处也不能断定 $\{x_n\}$ 有收敛子列，但这一缺陷并不影响证明). 设 $x_{n_\delta} \to x_0 \in X$，则由连续性有 $f(x_{n_\delta}) \to f(x_0)$. 另一方面有 $f(x_{n_\delta}) \to \beta$，故必有 $f(x_0) = \beta$，从而 β 就是 $f(x)$ 在 X 上的最大值. 同理可证 $f(x)$ 在 X 上取得最小值.

在这一点上，你必定会想起关于连续函数的另外两条经典定理：介值定理与一致连续性定理. 这些定理在本书中都将被推广到最一般形式，但目前还做不到这一点.

在分析中，连续函数的最大最小值定理有多大应用价值，你已深有印象. 建立在抽象的拓扑空间上的3.2.5(ii)，其应用范围则更广. 下面看两个简单例子.

3.2.6 例　(i) 设 X 是一度量空间，A,B 是 X 中的非空紧集. 定义函数

$$f: A \times B \to \mathbf{R}, \quad (x,y) \to d(x,y).$$

若在 X 中 $x_n \to x, y_n \to y$，则用三角不等式可推出：

$$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \leqslant d(x_n,x) + d(y_n,y) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

可见 $(x_n,y_n) \to (x,y) \Rightarrow f(x_n,y_n) \to f(x,y)$，因此 $f \in C(A\times B)$. 因 $A \times B$ 是紧集，由定理3.2.5(ii)，必有 $(a,b) \in A \times B$，使得

$$f(a,b) = \min_{x\in A, y\in B} f(x,y) = d(A,B). \quad (\text{用 2.1 节式(24)})$$

这就证明了：存在一对点 $a \in A, b \in B$，使得 $d(a,b)$ 是 A 与 B 之间的最短距离. 若 $A \cap B = \varnothing$，则 $d(a,b) > 0$，因而必 $d(A,B) > 0$.

(ii) 设 $A,B \subset \mathbf{R}^n$ 是两个有界集，$\overline{A} \subset B^\circ$，则 ∂A 与 ∂B 均为有界闭集(用2.1节式(17))，因而均为紧集. 因

$$\partial A \cap \partial B \subset \overline{A} \cap (\overline{B}\backslash B^\circ) \subset \overline{A}\backslash B^\circ = \varnothing, \quad (\text{用 2.1 节式(15)、式(17)})$$

故有 $d(\partial A, \partial B) > 0$，即 A,B 两集的边界有最小的正距离. 这一事实在直观上似乎不成问题. 但也应注意，当 A,B 是无界集时结论未必成立.

下面转向考虑紧性与其他拓扑性质的联系. 在紧性与已知的拓扑性质(如

“可数性”、可分性及分离性)之间,并无必然联系. 但紧性可用来加强涉及点的分离性,下面就是一个典型结果.

3.2.7 定理 紧 T_2 空间是正规空间,即

$$\text{紧性} + T_2 \text{分离性} \Rightarrow \text{正规性}.$$

证 设 X 是紧 T_2 空间,$A,B \subset X$ 是互不相交的闭集. 任给 $a \in A, b \in B$,取开集 U_{ab} 与 V_{ab} 分离 a 与 b. 注意 A 与 B 均为紧集(用定理3.2.4(i)). 对给定的 $b \in B$,$\{U_{ab} : a \in A\}$ 是 A 的开覆盖,故存在有限个 $a_i \in A$,使得

$$A \subset \bigcup_i U_{a_i b} \triangleq U_b.$$

令 $V_b = \bigcap_i V_{a_i b}$,则 V_b 是 b 的开邻域,且 $U_b \cap V_b = \varnothing$. 因 $\{V_b : b \in B\}$ 是 B 的开覆盖,故有有限个 $b_j \in B$,使得

$$B \subset \bigcup_j V_{b_j} \triangleq V, \quad A \subset \bigcap_j U_{b_j} \triangleq U.$$

U 与 V 分别为 A 与 B 的开邻域,

$$U \cap V \subset \bigcup_j (U_{b_j} \cap V_{b_j}) = \varnothing,$$

可见 U 与 V 分离 A 与 B. 因此 X 是正规空间. □

由定理3.2.7立即得到大量正规空间的例子:若 X 是紧 T_2 空间,Ω 是任一非空集,则 X^Ω 及其任何闭子空间均为紧 T_2 空间(用命题3.1.3与定理3.2.4),因而是正规空间. 特别,对任一闭区间 J,J^Ω 的任何闭子空间都是正规空间. 概括地说,定理3.2.7的意义在于,它指明了如下重要事实:对于紧空间来说,T_2,T_3,$T_{3\frac{1}{2}}$ 与 T_4 这几种分离性不再要区别.

定理3.2.7的证法是很典型的,它借助于紧集的“有限覆盖”性质,将本来对点适用的结论(相异点可用开集分离)推广到对紧集亦适用的结论(互不相交的紧集可开集分离). 凡遇到需要“用紧集代点”的情况,都可利用类似于定理3.2.7的证法. 例如,设 X 是正则空间,$A,B \subset X$ 分别为紧集与闭集且互不相交,则 A 与 B 必可开集分离. 这正是一个类似于定理3.2.7的命题,你应可用类似的方法来证明. 通过作习题132～136,你不难掌握这一类的方法.

C. 序列紧性与可数紧性

在将定理3.2.2(iv)比拟成聚点原理时,我们曾不满于其中所用的是网而不是序列. 如果改用序列,则所得的是另一种紧性概念,即所谓序列紧性. 本段处理包括序列紧在内的三种紧性,它们的重要性虽然不及定义3.2.1意义下的紧性,但有一个明显的好处,即能在某种“可数的形式”下处理,因而有关结论更接近于一些熟知的经典定理(如聚点原理与区间套定理).

3.2.8 定义 设 X 是一拓扑空间.

(i) 若 X 中任何序列有收敛子列,则称 X 为**序列紧空间**.

(ii) 若 X 的任何可数开覆盖有有限子覆盖，则称 X 为**可数紧空间**.

(iii) 若 X 的任何无限子集有聚点，则称 X 为**聚点紧空间**.

文献中对上述概念的命名颇多歧义. 例如有人称序列紧空间(或聚点紧空间)为列紧空间. 不过，如后面将指明的，对于度量空间来说，这些概念并无区别[①]. Fréchet 最初对度量空间定义的紧性，就取序列紧的形式.

如同紧集一样，自然亦可考虑序列紧集、可数紧集与聚点紧集. 但这种考虑并不增加实质上新的内容，因此下面的讨论只对空间进行.

定义 3.2.8 所定义的三种紧性中，形式上显然以可数紧性最接近于定义 3.2.1意义上的紧性，因此，我们首先考虑对可数紧性的等价刻画.

3.2.9 命题 对于拓扑空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是可数紧空间；

(ii) 若 $\{B_n\}$ 是 X 中有限相交的闭集列，则 $\bigcap B_n \neq \varnothing$；

(iii) 若 $\{B_n\}$ 是 X 中非空闭集的降列，则 $\bigcap B_n \neq \varnothing$.

证 (i)与(ii)的关系恰如定理3.2.2 中(i)与(iii)的关系，因而(i)$\Leftrightarrow$(ii)是自明的.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii). (ii)$\Rightarrow$(iii)是平凡的. 其次设条件(iii)满足，$\{B_n\}$ 是有限相交的闭集列. 令 $A_n = \bigcap_1^n B_i$，则 $\{A_n\}$ 是非空闭集的降列，于是由条件(iii)有 $\bigcap A_n = \bigcap B_n \neq \varnothing$. 这就证明了(iii)$\Rightarrow$(ii). □

命题3.2.9 中特别令人感兴趣的是条件(iii)，它不免使人联想起分析中的区间套定理(或称Cantor 定理). 更确切地说，命题3.2.9(iii)应称为**闭集套定理**，它首先由 Hausdorff 证明. 在这个意义上可以说，可数紧空间就是使闭集套定理或Cantor 定理成立的空间；而命题 3.2.9(iii)则可称为 Cantor 条件.

连同定义 3.2.1 定义的紧性一起，现在我们已有四种紧性了. 它们在形式上的差别是显然易见的，但实质性的逻辑关系则尚不十分清楚，而这无疑是我们急于要了解的. 这一问题的完全解决并不简单，但得出如下的部分结论却无困难.

3.2.10 命题 (i) 紧空间是可数紧空间；第二可数的可数紧空间是紧空间. 因此，对于第二可数空间来说，紧性与可数紧性一致.

(ii) 序列紧空间是可数紧空间；第一可数的可数紧空间是序列紧空间. 因此，对于第一可数空间(包括度量空间)来说，序列紧性与可数紧性一致.

(iii) 可数紧空间是聚点紧空间；聚点紧的 T_2 空间是可数紧空间. 因此，对于 T_2 空间来说，可数紧性与聚点紧性一致.

证 (i)是平凡的(注意用定理3.2.2(ii)).

(ii) 首先设 X 是序列紧空间. 若 $\{B_n\}$ 是 X 中非空闭集的降列，取 $x_n \in$

---

① 或许正是这一事实导致术语使用上的歧见.

$B_n(n\in\mathbf{N})$，则 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 设 $x_{n_k}\to x$，则显然有 $x\in\bigcap B_n$，因而 X 是可数紧的(用命题3.2.9). 其次，设 X 是可数紧的第一可数空间，$\{x_n\}\subset X$ 是一序列，令 $A_n=\{x_k: k\geqslant n\}$. 不妨设 x_n 互不相同，因而 $\bigcap A_n=\varnothing$. 若 $\{x_n\}$ 无收敛子列，则 A_n 均为闭集(这用到 X 的第一可数性及2.4节式(4))，因而 $\{A_n\}$ 是非空闭集的降列，而 $\bigcap A_n=\varnothing$，这与 X 的可数紧性相矛盾. 因此 $\{x_n\}$ 必有收敛子列，故 X 是序列紧空间.

(iii) 首先设 X 是可数紧空间，$A\subset X$ 是一无限集，今证 $A'\neq\varnothing$(记号依2.1节式(18)). 不妨设 $A=\{x_n\}$，x_n 互不相同. 令 $A_n=\{x_k: k\geqslant n\}$. 若 $A'=\varnothing$，则 $A'_n=\varnothing$，从而 A_n 为闭集(用2.1节式(15))，$\{A_n\}$ 是非空闭集的降列，但 $\bigcap A_n=\varnothing$，得出矛盾. 因此 $A'\neq\varnothing$，X 是聚点紧的. 其次，设 X 是聚点紧的 T_2 空间，$\{B_n\}$ 是 X 中非空闭集的降列，今证 $\bigcap B_n\neq\varnothing$. 可设 B_n 互不相同，于是有 $x_n\in B_n\backslash B_{n+1}(\forall n\in\mathbf{N})$. 令 $A=\{x_n: n\in\mathbf{N}\}$，则由聚点紧性有 $x\in A'$，今证 $x\in\bigcap B_n$. 若此结论不真，则有某个 B_n 不含 x，于是

$$x\in B_n^c\backslash(\{x_1,\cdots,x_{n-1}\}\backslash\{x\})\triangleq U.$$

因 X 中的有限集是闭集(T_2 分离性用于此!)，故 U 是 x 的开邻域. 易验证 $U\cap(A\backslash\{x\})=\varnothing$，这与 $x\in A'$ 相矛盾(用2.1节式(13)). 因此 $x\in\bigcap B_n$，如所要证. □

依据命题3.2.10，已考虑过的四种紧性的关系可用图3-6表示.

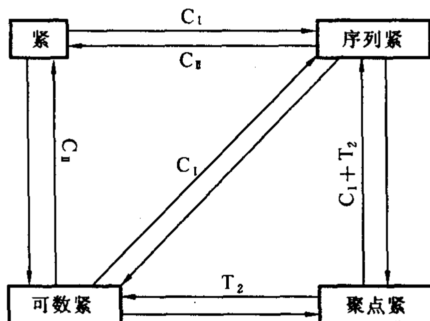


图 3-6

其中箭头旁注明的 C_I，T_2 等表附加条件，C_I 与 C_{II} 分别表示第一可数性与第二可数性. 对于第一可数的 T_2 空间(如度量空间)，序列紧、可数紧与聚点紧三者一致；对于第二可数的 T_2 空间(如可分度量空间)，所有四种紧性一致. 在最后这种情况下，可以说在拓扑空间的抽象框架内实现了有限覆盖定理、聚点原理与闭集套定理的统一. 这无疑是一个激动人心的结论. 在定理4.1.10中我们还将证明，对于度量空间无需第二可数性，四种紧性也是一致的.

如果没有 T_2，C_I，C_{II} 这类附加条件，上面提到的等价性一般就不再成立. 用

作说明的反例大都不很简单，且用到某些多少有点怪异的构造. 对于初学者来说，寻求或分析这类反例都是深感困扰的事情. 因此，如果你对于下面引述的反例不感兴趣，不妨跳过它.

3.2.11 例　(i) 非序列紧的紧空间. 取 $X = J^J$, $J = [0,1]$. X 显然是紧空间(依定理 3.2.4(ii)). 下面说明 X 不是序列紧的，为此得在其中找出一个无收敛子列的序列 $\{x_n\}$，这样的 x_n 定义如下：

$$x_n(t) = t \text{ 的二进位小数的第 } n \text{ 位数} \quad (t \in J, n \in \mathbf{N}).$$

设 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的任一子列. 取 $t \in J$，使 t 的二进位小数的第 n_k 位数交替地取 0 与 1，则

$$\{x_{n_k}(t)\} = \{0,1,0,1,\cdots\}$$

不收敛，从而 $\{x_{n_k}\}$ 在 X 中不收敛(注意，X 中的收敛意味着在区间 J 上处处收敛，参看例 2.3.8(iii)). 可见 $\{x_n\}$ 就是一个所要找的序列.

以上的 X 自然也是非序列紧的可数紧(且聚点紧)空间的例子. 你注意到 J^J 既不是第二可数的，也不是第一可数的(参考定理 2.4.7(ii))，从命题 3.2.10(i)，(ii)看来，这是理所当然的.

(ii) 非紧的序列紧空间. 设 X 仍如上，取 X 的子空间

$$Y = \{x \in X : x(t) \text{ 至多在可数多个点不为零}\}.$$

今说明 Y 是非紧的序列紧空间. 首先说明 Y 是非紧的，为此只要说明 $\overline{Y} = X$. 以 Σ 记 J 的有限子集之全体，则 $(\Sigma, \subset)$ 为有向集(参看例 1.2.2(iv)). 取定 $x \in X$，令 $x_\sigma = x\chi_\sigma$，则 $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ 是 Y 中的一个网，只要说明 $x_\sigma \to x$. 任取 x 的如下子基邻域(参看 2.3 节式(18))：

$$V = \{y \in X : |y(t_0) - x(t_0)| < \varepsilon\},$$

其中 $t_0 \in J$ 与 $\varepsilon > 0$ 是取定的. 令 $\sigma_0 = \{t_0\}$，则当 $\sigma \in \Sigma, \sigma \supset \sigma_0$ 时有 $x_\sigma(t_0) = x(t_0)$，因而 $x_\sigma \in V$. 这正表明 $x_\sigma \to x$ (用 2.1 节式(9)).

其次说明 Y 是序列紧空间. 任给序列 $\{x_n\} \subset Y$. 令

$$A = \bigcup (J \backslash x_n^{-1}(0)) = \bigcup \{x_n \neq 0\},$$

则 A 是可数集，在 $J \backslash A$ 上 $x_n(t) = 0 (\forall\, n \in \mathbf{N})$. 要取出 $\{x_n\}$ 的收敛子列(注意，Y 中的收敛是点态收敛!)，只要取出一个子列 $\{x_{n_k}\}$，使得它在每点 $t \in A$ 收敛. 因 A 是可数集，故所要子列的选择由传统的**对角线法**完成：令 $A = \{t_i\}$，取 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_n^1\}$，使 $\{x_n^1(t_1)\}$ 收敛；然后取 $\{x_n^1\}$ 的子列 $\{x_n^2\}$，使 $\{x_n^2(t_2)\}$ 收敛，…，如此得到一系列子列 $\{x_n^k\}, k = 1,2,\cdots$，其对角线序列 $\{x_n^n\}$ 就是 $\{x_n\}$ 的一个子列，它在每点 t_i 收敛.

以上例子表明，紧性与序列紧性是不可比较的.

(iii) 非可数紧的聚点紧空间. 取 $X = \mathbf{N}$，其中的拓扑 τ 由拓扑基

$$\mathscr{B} = \{\{2n-1, n\} : n \in \mathbf{N}\}$$

生成,今说明 (X,τ) 就是非可数紧的聚点紧空间. $\mathscr{B}$ 显然是 X 的一个可数开覆盖,它并无有限子覆盖,因此 X 不是可数紧的. 其次,任给非空集 $A \subset X$, 若 A 含有奇数 $2n-1$, 则必有 $2n \in A'$; 若 A 含有偶数 $2n$, 则 $2n-1 \in A'$. 故总有 $A' \neq \varnothing$, 因此 X 是聚点紧空间.

注意,上例中的空间 X 不是 T_2 空间,这是自然的.

D. 局部紧性

紧拓扑空间并不特别具有普遍性,举出非紧空间的例子易如反掌:你所最熟知的 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 就不是紧空间! 不过,对于局部问题,只要有某种"局部紧性",就同样能充分发挥紧集及"紧性论证"的作用. 局部紧空间的定义是很简单的.

3.2.12 定义 设 X 是一拓扑空间. 若 X 中每点有一紧邻域,则称 X 为**局部紧空间**.

从应用方便的角度考虑,通常将 T_2 分离性与局部紧性结合起来,以 LCH 记局部紧 Hausdorff 空间(参看定义 3.1.1). 与一般局部紧空间比较,LCH 有更好的性质,且又不失普遍性:LCH 在应用中极为常见,如 $\mathbf{R}^n$ 的开(或闭)子空间均为 LCH;在现代数学中处于重要地位的(有限维)拓扑流形也是 LCH. 因此,不妨将下面的讨论限于对 LCH 进行.

LCH 具有一系列良好的性质,其中一些最基本的性质概括在以下两个定理中.

3.2.13 定理 设 X 是 LCH,则以下结论成立:

(i) X 有由相对紧开集构成的拓扑基;

(ii) X 中每点有一紧邻域(或相对紧开邻域)基;

(iii) X 有由相对紧余零集构成的拓扑基.

证 显然(iii)⇒(i);注意到(iii)⇒全正则性(用定理 3.1.12),知由(iii)与(i)可推出(ii),故只要证(iii). 为此只要证,任给 $x \in X$ 与 x 的开邻域 V, 存在相对紧的余零集 U, 使得 $x \in U \subset V$. 由局部紧性, x 有一紧邻域 B. B 作为 X 的子空间是正规的(用定理 3.2.7). 令 $W = V \cap B^\circ$, 则 W 是 x 的开邻域且 $W \subset B$. 由 B 的正规性,有 $f \in C(B)$, 使得 $\{x\} \prec f \prec W$ (用定理 3.1.16(iv)). 补充定义 $f|B^c = 0$, 则 $f|W^c = 0$, $f|W^c$ 与 $f|B$ 均连续,而 $B \cup W^c = X$, B 与 W^c 均为闭集,故 $f \in C(X)$ (用拼接引理 2.3.4). 令 $U = \{f > 1/2\}$, 则

$$x \in U \subset W \subset V, \quad \overline{U} \subset W \subset B,$$

这表明 U 是 x 的邻域且为相对紧余零集(用引理 3.1.9 与定理 3.2.4(i)), U 即合于所求. □

已证定理表明,LCH 中每点不仅有紧邻域,而且有"任意小"的紧邻域. 这一

事实对于LCH的应用是关键的.解释定理3.2.13的最直观的例子是$\mathbf{R}^n$,熟知它有如下拓扑基(参看2.1D):

$$\mathscr{B}=\{B_r(x):x\in\mathbf{R}^n,0<r\in\mathbf{R}\}.$$

其中的$B_r(x)$显然为相对紧开集.$B_r(x)$也是余零集.令

$$f(y)=|y-x|\quad(|x|\text{ 依 2.1 节式(26)}),$$

则$f\in C(\mathbf{R}^n)$,$B_r(x)=\{f<r\}$.对每个$x\in\mathbf{R}^n$,

$$\{\overline{B}_r(x):r>0\}$$

显然是x的一个紧邻域基.从以上说明所获得的直观印象,对于理解一般的LCH将很有助益.

定理3.2.13的一个重要推论是:LCH是全正则空间,且局部是正规的(即其中每点有一邻域作为子空间是正规的).因此,对LCH可应用3.1C中的所有结论,而在局部则可应用3.1D中的结论.在一定意义上,下面的定理3.2.14正是应用3.1节中相关定理的结果.如同定理3.2.7一样,定理3.2.13也可作为说明"用紧性加强分离性"的典型例子.

3.2.14 定理　设X是LCH,$A\subset X$是一非空紧集,则以下结论成立.

(i) $A\subset\subset B\subset X\Rightarrow$存在紧集$K$,使得$A\subset\subset K\subset\subset B$.

(ii) 若$B\subset X$是与A不相交的非空闭集,则A与B可用某个$f\in C_0(X)$分离,其中

$$C_0(X)=\{f\in C(X):\operatorname{supp}f\text{ 为紧集}\}.\tag{1}$$

(iii) $A\subset\subset B\subset X\Rightarrow\exists f\in C_0(X)$,使得$A\prec f\prec B$.

(iv) 若$f\in C(A)$,则f可扩张为某个$g\in C_0(X)$,使得

$$\|f\|_A=\|g\|\quad(\text{记号依 3.1 节式(10)}).\tag{2}$$

有趣的是,以上结论与定理3.1.16中的(ii)～(v)几乎完全一致,只是假定了A为紧集,且以$C_0(X)$取代了$C(X)$(这就更加强了结论).其次也不难看出,对于T_2空间X成为LCH,定理3.2.14中的(i)～(iv)每条都是充分的,因而定理3.2.14实际上给出了LCH的一系列等价刻画.因为已有定理3.1.16及紧性条件可用,本定理的证明已不像定理3.1.16那么艰难了.

证　(i) 设$A\subset\subset B\subset X$.$\forall x\in A$,取$x$的紧邻域$K_x\subset B^\circ$(用定理3.2.13(ii)).因$\{K^\circ_x:x\in A\}$是紧集$A$的开覆盖,故有有限个$x_i\in A$,使得$A\subset\bigcup K^\circ_{x_i}$.令$K=\bigcup K_{x_i}$,则$K$是紧集,

$$A\subset\bigcup K^\circ_{x_i}\subset(\bigcup K_{x_i})^\circ=K^\circ\subset K\subset B^\circ,$$

即$A\subset\subset K\subset\subset B$,故$K$合于所求.

(ii) 因$A\subset B^c$,故由已证结论(i)有紧集K,使得$A\subset\subset K\subset B^c$.因$K$作为$X$的子空间是正规的,故由定理3.1.16(iv)有$f\in C(K)$,使得$A\prec f\prec K^\circ$.

补充定义 $f|K^c=0$，则如同定理3.2.13之证有 $f\in C(X)$，$f(A)=1$，$f(B)=0$，可见 f 分离 A 与 B. 由 $\mathrm{supp}f\subset K$ 知 $\mathrm{supp}f$ 作为 K 的闭子集是紧集，因此 $f\in C_0(X)$.

(iii)的证明几乎与(ii)的证法一样，不必重复.

(iv) 取 $B=X$ 用已证的(i)，得出紧集 K，使得 $A\subset K^\circ$. 由(iii)有 $\varphi\in C(X)$，使得 $A\prec\varphi\prec K$. 对正规空间 K 用定理3.1.16(v)，可设 $f\in C(K)$，$\|f\|_A=\|f\|_K$. 定义

$$g(x)=\begin{cases}\varphi(x)f(x), & x\in K,\\ 0, & x\in K^c,\end{cases}$$

则 $g|K$ 与 $g|K^{\circ c}$ 均连续，因而由拼接引理有 $g\in C(X)$；由

$$\mathrm{supp}\,g\subset\mathrm{supp}\,\varphi\subset K$$

知 $g\in C_0(X)$. 显然 $g|A=f|A$，且式(2)成立，故 g 是所要求的扩张. □

定理3.2.14是一个极有价值的结果，它广泛应用于LCH上涉及连续函数的论证，尤其用于连续函数的截断与构成. 在这一点上LCH不仅类似于正规空间，而且以 $C_0(X)$ 取代 $C(X)$，其意义特别重大. $f\in C_0(X)$ 可解释为 f 在无穷远点邻近为零，在建立定理3.2.17后意义更为清楚. 在一定程度上可以说，正因为有定理3.2.14这样的便于应用的结果，才使得LCH在现代分析中处于特别重要的地位. 简言之，唯有在LCH上才能展开较丰富的分析学.

顺便指出，拓扑向量空间理论中的一基本结果是：一拓扑向量空间是LCH当且仅当它是有限维的. 因此，有限维拓扑向量空间与无限维拓扑向量空间在性质上的巨大差别，在一定程度上正是源于LCH与非LCH的深刻差别.

为给出定理3.2.14的一定直观解释，你仍应想起 $\mathbf{R}^n$ 这个熟悉的例子. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是一紧集，即有界闭集. 若 $A\subset\subset B\subset\mathbf{R}^n$，则 $A\subset B^\circ$，用例3.2.6中的方法可以说明 $d(A,B^{\circ c})\triangleq 3r>0$. 令

$$\begin{cases}K=\{x\in\mathbf{R}^n: d(x,A)\leqslant r\},\\ L=\{x\in\mathbf{R}^n: d(x,A)\leqslant 2r\},\end{cases}\tag{3}$$

则 K，L 为闭集(依例2.2.5(iv))，且必定有界(试证之!)，因而均为紧集. 其次显然有 $K\subset L^\circ$，$L\subset B^\circ$，因而(参看图3-7)

$$A\subset\subset K\subset\subset L\subset B^\circ,$$

K 正是定理3.2.14(i)所断言存在的集. 定义

$$f(x)=\frac{d(x,K^c)}{d(x,A)+d(x,K^c)}\quad(x\in\mathbf{R}^n).\tag{4}$$

$\forall\, x\in A, y\in K^c$，有 $d(x,y)\geqslant d(y,A)>r$ (用式(3))，从而 $d(x,K^c)\geqslant r>0$，这表明式(4)的分母恒大于零，因此 $f\in C(\mathbf{R}^n)$. 其次显然 $f(A)=1$，$f(K^c)=0$，从而 $\mathrm{supp}f\subset L\subset B^\circ$，故有 $f\in C_0(\mathbf{R}^n)$，$A\prec f\prec B$. 由此可见，在 $X=\mathbf{R}^n$

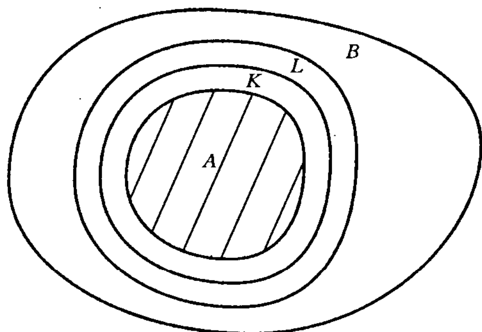


图3-7

这种特殊情况下，定理3.2.14(iii)中的 f 可由一直接构造得出.

$\mathbf{R}^k$ 可用一紧集的升列所覆盖，例如闭球的升列 $\{\overline{B}_n(0): n \in \mathbf{N}\}$ 显然就覆盖 $\mathbf{R}^k$. 这一性质并不为所有LCH所具有，但为第二可数的LCH所具有.

3.2.15 定理 设 X 是一个第二可数的LCH，则存在紧集的升列 $\{K_n\}$，使得

(i) $X = \bigcup K_n$；

(ii) $K_n \subset K^\circ_{n+1} (\forall\, n \in \mathbf{N})$.

证 取可数个相对紧开集 $U_n (n \in \mathbf{N})$ 组成 X 的拓扑基(用定理3.2.13(i)与定理2.4.6(ii)). 令 $K_1 = \overline{U}_1$. 因 $\{U_n : n \in \mathbf{N}\}$ 是紧集 K_1 的开覆盖，故有 $i_2 > 1$，使得 $K_1 \subset \bigcup_1^{i_2} U_i \triangleq V_2$. 令 $K_2 = \overline{V}_2, \cdots$，如此继续，得到 $1 < i_2 < \cdots < i_n < \cdots$，使得

$$K_{n-1} \subset \bigcup_{i=1}^{i_n} U_i = V_n, \quad K_n = \overline{V}_n, n = 2, 3, \cdots.$$

$\{K_n\}$ 显然是紧集的升列. $\forall\, x \in X$，x 必含于某个 U_i，因而当 $i_n \geqslant i$ 时 $x \in K_n$，有 $X = \bigcup K_n$. 由 K_n 与 V_n 的构成有

$$K_n \subset V_{n+1} \subset K^\circ_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

故 $\{K_n\}$ 合于定理要求. □

上述定理中所述的紧集列 $\{K_n\}$ 称为 X 中紧集的穷竭序列，它就如 $\mathbf{R}^k$ 中的球列 $\{\overline{B}_n(0): n \in \mathbf{N}\}$ 一样，随着 n 增大至无穷，逐渐填满全空间. 有趣的是，即使对于 $\mathbf{R}^k$ 中的真开子集 Ω，亦可直接构造出其中紧集的穷竭序列(参看图3-8)：

$$K_n = \{x \in \mathbf{R}^k : d(x, \partial\Omega) \geqslant 1/n, |x| \leqslant n\} \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{5}$$

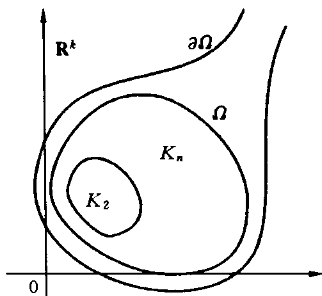


图3-8

K_n 显然是有界闭集，因而是紧集；

$$K_n \subset \{x \in \Omega : d(x,\partial\Omega) > 1/(n+1), |x| < n+1\} \subset K^\circ_{n+1}.$$

$\forall x \in \Omega$，当 n 充分大时有 $d(x,\partial\Omega) \geqslant 1/n, |x| \leqslant n$，因而 $x \in K_n$. 这表明 $\Omega = \bigcup K_n$. 上面构成的 K_n 固然是有趣的，但不妨指出，在理论分析中，K_n 的具体构成并不总是重要的.

对于LCH，以下不变性结果与定理3.2.4颇不相同.

3.2.16 定理 (i) LCH 是开遗传与闭遗传的，即LCH 的开子空间与闭子空间均为LCH.

(ii) 设 X 是拓扑空间 $X_i(i \in I)$ 的积空间，则 X 是LCH $\Leftrightarrow$ 每个 X_i 是LCH，且除至多有限个例外，X_i 是紧空间. 因此，LCH 是有限可乘的.

(iii) 设 X 是LCH，Y 是T_2空间，$F: X \to Y$ 是连续开满射，则 Y 是LCH.

证 考虑到T_2分离性是遗传的与可乘的，而对 Y 有T_2假设，因此在下面证明中无需考虑T_2分离性.

(i) 设 X 是LCH，$x \in S \subset X$. 若 S 是开子空间，则由定理3.2.13(ii)有 x 的紧邻域 V，使 $V \subset S$，V 亦为 x 在 S 中的紧邻域. 若 S 是闭子空间，取 x 的紧邻域 W，则 $S \cap W$ 是 x 在 S 中的紧邻域(用命题2.3.2(iii)与定理3.2.4(i)). 因此，在两种情况下 S 均为LCH.

(ii) 首先设 X 是LCH. 利用将在下面证明的结论(iii)，知每个 X_i 是LCH. 在 X 中取一非空的相对紧开集 V (用定理3.2.13(i))，V 必含形如2.3节式(11)的基开集. 于是除去某个有限集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_n\} \subset I$ 之外，对于 $i \in I$ 有

$$X_i = P_iV = P_i\overline{V},$$

其中 P_i 是投影；由 $\overline{V}$ 为紧集推出如上的 X_i 是紧空间. 反之，设每个 X_i 为LCH，且至多除去有限多个例外 X_i 是紧空间，则不妨设 $I = \{1,2,\cdots,n\}$ (用Tychonoff定理与2.4节式(2)). 任给 $x = (x_i) \in X$，取 x_i 在 X_i 中的紧邻域 V_i，则 $\prod V_i$ 是 x 的紧邻域(用 Tychonoff 定理与命题2.3.7(ii))，因而 X 是LCH.

(iii) 任给 $y \in Y$，取 $x \in X$ 使 $Fx = y$；取 x 的紧邻域 A，则 FA 是 y 的紧邻域(用定理2.2.8(iii)与定理3.2.4(iii)). 因此 Y 是LCH. □

利用定理3.2.16，我们可写出一大批LCH 的例子. 例如：

(i) $\mathbf{R}^n$ 的任何开子空间与闭子空间(并不要求有界)，其中包括 $\mathbf{N}$ 这样的离散子空间.

(ii) 紧方体 J^Ω (J 是闭区间)的任何开子空间.

(iii) 诸如 $S^1 \times \mathbf{R}, S^n \times \mathbf{R}^n, T^n \times \mathbf{R}$ 的乘积空间.

另一方面，应用定理3.2.16(ii)也可推出，当 $|\Omega| \geqslant \omega$ 时 $\mathbf{R}^\Omega$ 不是LCH. 这一事实似乎暗含了这样的结论：无限维空间不是LCH. 但在本书的框架内，这一结论并不能获得确切的含义，尽管我们已顺便提到，无限维拓扑向量空间确非LCH.

前面已多次利用 $\mathbf{R}^n$ 这个简单模型引出 LCH 中的适当结论. 现在我们来注意 $\mathbf{R}^n$ "变成"紧空间的一种简单方法,最好用一维情况来作说明. 如图 3-9 所示,如果在 $\mathbf{R}$ 上附加一个 ∞ 点,就得到一个紧空间 $\mathbf{R}_\infty$;∞ 在 $\mathbf{R}_\infty$ 中的一个邻域基由所有闭区间在 $\mathbf{R}_\infty$ 中的补集组成. 类似的构造可用到任何 LCH,得到如下的重要定理.

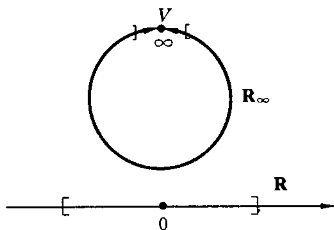


图 3-9

3.2.17 定理　设 X 是一个非紧的 LCH, ∞ 是一个不在 X 中的元,令 $X_\infty = X \cup \{\infty\}$,

$$\tau_\infty = \tau_X \cup \{X_\infty \backslash K : K \subset X \text{ 为紧集}\}. \tag{6}$$

则 (X_∞, τ_∞) 是一个紧 T_2 空间,它以 X 为稠密的开子空间.

如上的 (X_∞, τ_∞) 在同胚的意义上是唯一的,称为 X 的**一点紧化**,或 Alexandrov 紧化. 它是由俄罗斯数学家Alexandrov(1924)首先考虑的. X_∞ 中的附加点记为 ∞, 这一点并无本质意义.

证　容易验知 τ_∞ 满足开集公理,因而是 X_∞ 上的一个拓扑. 下面以 X_∞ 记 (X_∞, τ_∞). 任给紧集 $K \subset X$, 有 $X \cap (X_\infty \backslash K) = X \backslash K \in \tau_X$, 由此看出 τ_X 是 τ_∞ 在 X 中的相对拓扑. 因 $\tau_X \subset \tau_\infty$, 故 X 是 X_∞ 的开子空间. 任给紧集 $K \subset X$, $X_\infty \backslash K$ 是 ∞ 在 X_∞ 中的开邻域;因 X 非紧,必 $K \neq X$, 从而 $(X_\infty \backslash K) \cap X \neq \varnothing$, 可见 X 在 X_∞ 中稠密. 因 $\tau_X \subset \tau_\infty$, X 中任一对相异点在 X_∞ 中显然也是邻域分离的. 任给 $x \in X$, 取 x 在 X 中的紧邻域 K, 则 K 与 $X_\infty \backslash K$ 在 X_∞ 中分离点 x 与 ∞. 因此 X_∞ 是 T_2 空间. 若 $\mathscr{A} \subset \tau_\infty$ 覆盖 X_∞, 则必有 $A = X_\infty \backslash K \in \mathscr{A}$, $K \subset X$ 为紧集. K 也是 X_∞ 中的紧集,因而有有限族 $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, 使得 $K \subset \mathscr{B}^\#$, 于是 $\mathscr{B} \cup \{A\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的有限子覆盖,故 X_∞ 是紧空间. □

今后总用 X_∞ 表示 X 的一点紧化.

从常识的眼光看来,一点紧化构造中唯一让人感到不很踏实的是,附加的 ∞ 究竟为何物? 它是实在的,还是一种虚拟? 如果你不喜欢它,通常有很简单的办法避开它. 设 X 与 X_∞ 依定理 3.2.17. 若存在拓扑嵌入

$$F : X \to Y = FX \cup \{b\},$$

其中 Y 是一紧 T_2 空间, $b \overline{\in} FX$, $\overline{FX} = Y$, 补充定义 $F(\infty) = b$, 则必 $F : X_\infty \cong Y$, 因而在实质上 Y 就是 X 的一点紧化.

用两个简单例子来作说明.

3.2.18 例　(i) 设 S^1 依 2.3 节式(21),则

$$f : \mathbf{R} \to S^1, \quad x \to \exp(2\mathrm{i} \arctan x)$$

是一拓扑嵌入,且

$$S^1 = f(\mathbf{R}) \cup \{-1\} = \overline{f(\mathbf{R})},$$

故 S^1 是 $\mathbf{R}$ 的一点紧化.

(ii) 设

$$S^n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : |x| = 1\},$$

以 $p = (0, \cdots, 0, 1)$ 记 S^n 的北极；认定 $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times \{0\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$. 任给 $x \in S^n \backslash \{p\}$，从 p 到 x 的射线交 $\mathbf{R}^n$ 于唯一点 y，y 必可表为

$$y = \lambda p + (1 - \lambda) x. \tag{6}$$

式(6)两端的第 $n+1$ 个坐标分别为0与 $\lambda + (1-\lambda)x_{n+1}$，由此解出 λ，然后代入式(6)得

$$y = \frac{x - x_{n+1} p}{1 - x_{n+1}}. \tag{7}$$

另一方面，对任给 $y \in \mathbf{R}^n$，从式(7)可唯一地解出

$$x = (1 - x_{n+1}) y + x_{n+1} p. \tag{8}$$

注意到 y 与 p 正交，$|x| = 1$，由式(8)得

$$1 = (1 - x_{n+1})^2 |y|^2 + x_{n+1}^2.$$

由此解出(注意 $x_{n+1} < 1$)

$$x_{n+1} = (|y|^2 - 1)/(|y|^2 + 1);$$

然后代入式(8)得

$$x = \frac{2y + (|y|^2 - 1)p}{|y|^2 + 1}. \tag{9}$$

综合式(7)与式(9)得出结论：

$$F : S^n \backslash \{p\} \to \mathbf{R}^n, x \to \frac{x - x_{n+1} p}{1 - x_{n+1}}$$

是一个同胚，它就是所谓**球极投影**. 由此又推出，$F^{-1} : \mathbf{R}^n \to S^n$ 是一拓扑嵌入. 因 S^n 是一紧 T_2 空间，$\overline{S^n \backslash \{p\}} = S^n$，故 S^n 是 $\mathbf{R}^n$ 的一点紧化. 特别，S^2 是 $\mathbf{R}^2 (\cong \mathbf{C})$ 的一点紧化，它通常称为 **Riemann 球面**，在复分析中起重要作用.

从上面构成的映射 F 来看，点 p 恰对应 $(\mathbf{R}^n)_\infty$ 的 ∞ 点. 应注意的是，p 在 S^n 上并无任何异常之处，以 S^n 上其他任何点取代 p 作为 $(\mathbf{R}^n)_\infty$ 的 ∞ 点，亦无不可.

3.3 连　通　性

在最初步理解的意义上，我们曾将紧集比拟为类似于闭区间的集，因正是对闭区间首先建立了有限覆盖定理. 不过，即使在实直线上，闭区间与其他紧集(例如 Cantor 集)也可能差别甚大. 这就毫不奇怪，基于闭区间的一些经典定理(例

如介值定理),并不能推广到一般紧空间上.从直观上看,区间还有一个未曾注意到的明显特点,即"连成一片"或"连绵不断".现在就来给出它的拓扑表述,具有这种性质的拓扑空间就是连通空间.连通性无疑是最具几何色彩的拓扑性质之一,因而特别值得关注.

A. 连通空间与连通集

3.3.1 定义　设 X 是一拓扑空间.若存在分解:

$$X = A \cup B, \quad \varnothing \neq A, B \in \tau_X, \quad A \cap B = \varnothing, \tag{1}$$

则说 X 是**隔断**的.当 X 非隔断(即形如式(1)的分解不存在)时,称 X 为**连通空间**.若 $A \subset X$ 作为子空间是连通的,则称 A 为 X 的连通子集,简称为**连通集**.

依据相对拓扑的构成(参考定义 2.3.1),可将 $A \subset X$ 为连通集的条件直接表述为不存在 A 的如下开覆盖 $\{U, V\}$:

$$\begin{cases} A \subset U \cup V, & A \cap U \neq \varnothing \neq A \cap V, \\ U, V \in \tau_X, & A \cap U \cap V = \varnothing. \end{cases} \tag{2}$$

注意,在"连通集就是连通子空间"这一点上,连通集与紧集是相同的.

从逻辑上看,条件(1)已十分清楚了,它可表述为:X 被分解为两个非空开集的不交并.因此,X 是连通空间意味着它不能分解为两个非空开集的不交并.尽管如此,我们却不很清楚如何运用定义 3.3.1 来判定拓扑空间及其子集的连通性,即使判定一实区间的连通性也会遇到困难(你不妨试试看!).问题在于,定义 3.3.1 中的连通性条件是一个**否定**陈述:不存在形如式(1)的分解,而要严格排除某种对象的存在性,通常未必容易.与此相反,若要肯定某种对象存在,则只要能举出一个特例就够了.因此,用条件(1)来判定不连通或隔断性,看来要容易些.例如,我们可立即断定,至少含两个点的离散拓扑空间是不连通的;$X = [0,1) \cup (1,2)$ 是不连通的;n 阶实可逆矩阵所构成的空间也是不连通的.最后这个结论的证明如下:以 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 记 n 阶实矩阵之全体,它作为拓扑空间等同于 $\mathbf{R}^{n^2}$.令

$$X = \{A \in \mathbf{R}^{n \times n} : \det A \neq 0\},$$
$$U = \{A \in \mathbf{R}^{n \times n} : \det A > 0\},$$
$$V = \{A \in \mathbf{R}^{n \times n} : \det A < 0\}.$$

因 $A \to \det A$ 显然是 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 上的连续函数,故 U 与 V 均为 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 的开子集(用推论 2.2.4).$X = U \cup V$ 就是一个形如式(1)的分解,因此 X 是不连通的.

然而,对连通性作出**肯定**判断毕竟是我们更感兴趣的事情.依据已有的经验,如果定义所给的条件不便于用作判据,就应寻求其他等价条件.对于不连通性,我们不难立即写出它的一系列等价条件:

(i) X 可分解为两个非空闭集的不交并;

(ii) X 有既开又闭的非空真子集;

(iii) X 有无边界点的非空真子集.
注意到对任给 $A \subset X$，有 $\partial A = \overline{A} \backslash A^{\circ}$ (依 2.1 节式(17))，因而

$$\partial A = \varnothing \Leftrightarrow \overline{A} = A^{\circ} \Leftrightarrow A \text{ 既开又闭},$$

条件(i)～(iii)均等价于分解式(1)存在是显然的. 不过，通过否定条件(i)～(iii)中的任何一个来判定 X 连通，看来是同样不容易的. 可庆幸的是，对于连通性有一个用肯定陈述表达的等价刻画，从形式上看，它与前面已给出的刻画似乎是相去甚远的.

3.3.2 定理 拓扑空间 X 是连通的 $\Leftrightarrow \forall f \in C(X), f(X)$ 是一个区间.

注意此处所说的区间包括 $[a,b], (a,b], (a,b), [a,b)(-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty)$ 诸形式，也包括仅含一点的退化情形. 实际上，对区间有一个严格定义：集 $J \subset \mathbf{R}$ 为区间 $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in J, \alpha \leqslant \beta$，有 $[\alpha, \beta] \subset J$. 这意味着 $\mathbf{R}$ 上的区间就是凸集!

证 若存在 $f \in C(X)$，使得 $f(X)$ 不是区间，则必有 $\alpha, \beta \in f(X), \alpha < \beta$，使得 $[\alpha, \beta] \not\subset f(X)$，因而有 $r \in (\alpha, \beta) \backslash f(X)$. 于是

$$X = \{f < r\} \cup \{f > r\}$$

就是一个满足条件(1)的分解，因而 X 不是连通空间. 反之，若 X 是不连通的，则有一个如式(1)的分解存在. 令 $f = \chi_A$，则必定 $f \in C(X)$ (用例 2.2.5(ii))，而 $f(X) = \{0,1\}$ 不是区间. □

以上证明的一个附带收获就是得到了以下结论.

$$X \text{ 不连通} \Leftrightarrow \text{存在 } f \in C(X), \text{使得 } f(X) = \{0,1\}.$$

试回想一下，分析中的介值定理无非是说：定义于区间上的实连续函数的值域是一个区间. 以此与定理 3.3.2 相对照，现在我们可以说，**连通空间正是对其上的连续函数成立介值定理的拓扑空间**. 经典的介值定理只不过是断定实区间必为连通集而已. 这就解决了我们早已提出的问题：将介值定理推广于拓扑空间上的连续函数. 为行文方便，下面称定理 3.3.2 中的条件为对连通性的**介值性刻画**.

将定理 3.3.2 用到拓扑空间 X 的任一非空子集 A 得到：A 是连通集 $\Leftrightarrow \forall f \in C(A), f(A)$ 是一区间. 注意这与对 X 连通性的刻画，即使在形式上也没有什么区别.

现在的问题是应用定理 3.3.2 来判定连通性是否有效. 不妨说，对于一个其结构尚未充分阐明的空间，无论用哪个条件来判定其连通性都不会是件容易的事. 但如果已知某个集(或空间)是由已知的连通集(或连通空间)循一定途径构成的，则运用定理 3.3.2 来判定其连通性通常是方便的. 下面的结果足以说明这一点.

3.3.3 定理 (i) 设 $A_i \subset X (i \in I)$ 是一族连通集. 若存在连通集 $A \subset X$ 与每个 $A_i (i \in I)$ 相交，则 $A \cup (\bigcup A_i)$ 是连通集. 特别，若 $\bigcap A_i \neq \varnothing$，则 $\bigcup A_i$ 是

连通集，即有公共点的连通集的并是连通集.

(ii) 设 $A \subset X$ 是连通集，$A \subset B \subset \overline{A}$，则 B 是连通集. 特别，连通集的闭包是连通集.

(iii) 设 X 是拓扑空间 $X_i(i \in I)$ 的积空间，则 X 是连通空间 $\Leftrightarrow$ 每个 X_i 是连通的. 因此，连通性是可乘的.

(iv) 连通性在连续映射下保持不变，即若 $F \in C(X,Y)$，X 是连通空间，则 FX 是 Y 中的连通集.

证　(i) 令 $U = A \cup (\bigcup A_i)$. 任给 $f \in C(U)$，只要证 $f(U)$ 是一区间(用定理 3.3.2). 令 $J = f(A)$，$J_i = f(A_i)$，则 J 与 $J_i(i \in I)$ 均为区间，且 $J \cap J_i \neq \varnothing(\forall i \in I)$. 为证

$$f(U) = J \cup (\bigcup J_i)$$

是区间，只要对任给 $\alpha,\beta \in f(U)$，$\alpha < \beta$，证 $[\alpha,\beta] \subset f(U)$. 分别对 $\alpha,\beta \in J$，$\alpha \in J$，$\beta \in J_i$ 及 $\alpha \in J_i$，$\beta \in J_j(i \neq j)$ 这几种情况进行讨论，结论是明显的，其细节不必赘述.

(ii) 设 $f \in C(B)$，则 $J = f(A)$ 与 $\overline{J}$ 都是区间. A 在 B 中的相对闭包 $= B \cap \overline{A} = B$ (用命题 2.3.2(v))，于是

$$J \subset f(B) \subset \overline{f(A)} = \overline{J}, \quad \text{(用定理 2.2.3(vi))}$$

这推出 $f(B)$ 为区间. 因此 B 是连通集.

(iii) 若 X 是连通空间，则由下面就要证明的(iv)知 $X_i(i \in I)$ 均为连通空间. 为证逆命题，首先指出：若 X,Y 是连通空间，取定 $x_0 \in X$，则利用

$$X \times Y = (\{x_0\} \times Y) \cup \left(\bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}\right) \quad \text{(见图 3-10)}$$

与已证的(i)得出 $X \times Y$ 为连通空间. 由此进而推出，有限个连通空间的积空间是连通空间. 现在设每个 $X_i(i \in I)$ 是连通的，而 X 非连通，今由此推出矛盾. 取 $f \in C(X)$，使 $f(X) = \{0,1\}$. 因 $f^{-1}(0)$ 与 $f^{-1}(1)$ 均为非空开集，故有有限集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_n\} \subset I$，非空开集 $U_k,V_k \subset X_{i_k}(1 \leqslant k \leqslant n)$，使得

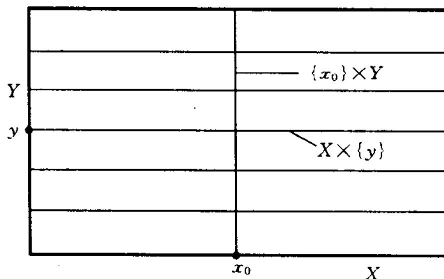


图 3-10

$$\bigcap P_{i_k}^{-1}U_k \subset f^{-1}(0), \quad \bigcap P_{i_k}^{-1}V_k \subset f^{-1}(1). \tag{3}$$

对 $i \in I\backslash\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$ 取定 $x_i^0 \in X_i$，则

$$Y \triangleq \prod_{k=1}^{n} X_{i_k} \times \prod_{i\neq i_1,\cdots,i_n} \{x_i^0\} \cong \prod_{k=1}^{n} X_{i_k}$$

是连通的，且 $\left(\bigcap P_{i_k}^{-1}U_k\right) \cap Y \neq \varnothing \neq \left(\bigcap P_{i_k}^{-1}V_k\right) \cap Y$. 将 f 看作限定在连通空间 Y 上的函数，它仍然是连续函数，但其值域为 $\{0,1\}$，这就得出矛盾.

(iv) 任给 $f \in C(FX)$，令 $g = f \circ F$，则 $g \in C(X)$，于是由 X 连通知 $f(FX) = g(X)$ 是一个区间. 这表明 FX 是连通的. □

在定理 3.3.3 的证明中，我们有意尽可能地使用连通集的介值性刻画，以凸显“介值性论证”的优势. 实际效果如何，你应当已有体会.

利用定理3.3.3，可从少数较简单的连通集出发，构成多种多样的连通集. 这就容易获得大量连通集的例子. 下面只是随手写出的一些例子.

(i) 方体 J^{Ω}. J 是任一区间(不必是闭区间)，Ω 是任一非空集. 特别，$\mathbf{R}^n$ 是连通的.

(ii) S^n. S^n 可看作 $\mathbf{R}^n$ 的一点紧化(参看例3.2.18(ii))，因而可认为 $S^n = \overline{\mathbf{R}^n}$ (用定理 3.2.17)，于是可用定理 3.3.2(ii).

(iii) 乘积 $S^1 \times \mathbf{R}, S^n \times S^n, T^n$ 等.

(iv) Klein 瓶与投影平面. 二者都是 $J \times J$ 的商空间，$J = [0,1]$ (参看例 2.3.11).

(v) 连续曲线 $\varphi(J) \subset X$. 此处 $\varphi \in C(J,X), J = [0,1]$.

以上结论可与 3.2B 中利用定理 3.2.4 构成紧集相对照.

下面转向连通性的应用. 连通性概念用于现代数学的许多领域，此处并不能作什么概括. 下面只是例举两类颇为典型的应用，二者所循思路有所不同.

应用之一是证明连通空间 X 上的某个命题 P 成立，P 既可以是一条拓扑学命题，亦可能表面上完全不涉及拓扑学. 若令

$$A = \{x \in X : P \text{ 在 } x \text{ 成立}\},$$

则证 P 在 X 上处处成立相当于判明 $A = X$. 利用 X 的连通性，只需验证：

(a) P 至少在一点 $x_0 \in X$ 成立(因而 $A \neq \varnothing$)；

(b) 若 P 在 x 成立，则 P 必在 x 邻近成立(这表明 A 是开集)；

(c) 若 P 在 x 不成立，则 P 必在 x 邻近不成立(即 A^c 是开集).

显然(a)～(c) $\Rightarrow A = X \Rightarrow P$ 在 X 上处处成立. 对这种论证机制可作如下直观比喻：掉进连通空间的一滴水倘能无限制地向周围浸润，则它将浸遍全空间！

以上证明模式也容易使你联想到数学归纳法：为证某命题对任何 $n \in \mathbf{N}$ 成立，只要验证：

(a) P 对 $n=1$ 成立；

(b) 若 P 对某个 $n\in\mathbf{N}$ 成立，则必对 $n+1$ 成立.

受以上类比的启发，不妨将基于连通性的论证也看作一种特殊形式的归纳法. 运用这种方法所完成的一些证明，简洁而优美，颇具吸引力. 下面看两个简单例子.

3.3.4 例　(i) 函数为常数的条件. 设 $G\subset\mathbf{R}^n$ 是一区域（即连通开集），$f(x)$ 是定义于 G 内的可微实函数. 若 $\nabla f(x)=0(\forall x\in G)$，则在 G 内 $f(x)\equiv$ const.

证　取定 $x_0\in G$，令

$$A=\{x\in G: f(x)=f(x_0)\},$$

只需证 $A=G$. 证明由以下三个标准步骤组成.

(a) $x_0\in A$，这是平凡的.

(b) 设 $x\in A$. 因 x 是 G 的内点，故有 $r>0$，使得 $B_r(x)\subset G$. $\forall y\in B_r(x)$，由中值定理有

$$f(y)-f(x)=\nabla f(x+\theta(y-x))(y-x)=0,$$

其中 $0<\theta<1$. 这推出 $f(y)=f(x)=f(x_0)$，因此 $B_r(x)\subset A$.

(c) 设 $x\in G\backslash A$，则同理可证有 $r>0$ 使 $B_r(x)\subset G\backslash A$.

综合以上三步并用 G 的连通性，得 $A=G$.

(ii) 解析函数的唯一性. 设 G 是复平面上一区域，$f(z)$ 是 G 内的复解析函数，Z 是 $f(z)$ 的零点之全体，$G\cap Z'\neq\varnothing$，则 $f(z)\equiv 0(z\in G)$.

证　令 $A=G\cap Z'$，只要证 $A=G$. 为此用类似于(i)的步骤.

(a) $A\neq\varnothing$ 已作为假设.

(b) 设 $z\in A$，则 $z\in G$，且有序列 $\{z_k\}\subset Z\backslash\{z\}$，使得 $z_k\to z$. 取 $r>0$ 充分小，展开 $f(\tau)$ 为幂级数：

$$f(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\tau-z)^n\quad(|\tau-z|<r).$$

以 $\tau=z_k$ 代入并令 $k\to\infty$ 得 $a_0=0$，从而

$$\frac{f(\tau)}{\tau-z}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\tau-z)^{n-1}\quad(0<|\tau-z|<r).$$

又以 $\tau=z_k$ 代入并令 $k\to\infty$，得 $a_1=0$. 如此下去得出 $a_n=0(\forall n\geqslant 0)$. 因此当 $|\tau-z|<r$ 时 $f(\tau)=0$，从而 $\tau\in A$. 这表明 A 是开集，因而亦是 G 的相对开子集.

(c) 因 Z' 是闭集，故 A 是 G 中的相对闭集，从而 $G\backslash A$ 是 G 的相对开子集.

综合以上三步即得所要证.

连通性的另一类应用服务于拓扑学自身的目的：用于判定两个拓扑空间不同胚. 若 $F: X\cong Y$，则 F 实现 X 与 Y 中的连通集之间的一一对应. 若能指出 X

中某个连通集在任何双射 $F:X\to Y$ 之下对应 Y 中的不连通集，则 X 与 Y 必不同胚. 以下例子固然简单，但亦颇能说明问题.

3.3.5 例 (i) $\mathbf{R}$ 不能同胚于区间 $[a,\infty)$.

证 设 $f:[a,\infty)\to\mathbf{R}$ 是一双射，$b=f(a)$，则

$$\mathbf{R}\backslash\{b\}=(-\infty,b)\cup(b,\infty) \text{ 是不连通的.}$$

另一方面，与 $\mathbf{R}\backslash\{b\}$ 对应的 $[a,\infty)\backslash\{a\}=(a,\infty)$ 却是连通的，故 f 必非同胚.

(ii) $\mathbf{R}^n(n>1)$ 不能同胚于 $\mathbf{R}$.

证 设 $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是一双射，$F(0)=a$，则 $\mathbf{R}\backslash\{a\}$ 是不连通的，而 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 是连通的(如何证此?)，故 F 必非同胚.

(iii) $T^2(=S^1\times S^1)$ 不同胚于 S^2.

证 设 $F:T^2\to S^2$ 是一同胚，则它将 T^2 的某一纬线 C 映成 S^2 上一封闭曲线 L. $T^2\backslash C$ 是连通的，但 $S^2\backslash L$ 却不连通，这与 F 为同胚矛盾.

对于判定两个拓扑空间不同胚，在第 5 章将给出更系统的方法. 在一定意义上，这些方法也是与连通性有关的. 这一事实突出表明了连通性的重要性.

B. 路连通性

在直觉中所体验到的连通性，通常与“路径连接”这样的印象联系在一起. 从拓扑学的观点看来，这是一种实质上更强的连通性，即所谓路连通性，其准确定义如下.

3.3.6 定义 设 $J=[0,1]$. 若 $\varphi\in C(J,X)$，则称 φ 为 X 中连接点 $\varphi(0)$ 与 $\varphi(1)$ 的**路**或**路径**. 若 X 中任一对点都可用 X 中的路连接，则称 X 为**路连通空间**(亦称为弧连通空间). 若 $A\subset X$ 作为子空间是路连通的，则称 A 为**路连通集**.

以下是与定义有关的几点说明.

(i) 依定义，X 中的路 φ 是指**映射** $\varphi\in C(J,X)$，而非指 X 的**子集** $\varphi(J)$. 从对路或连续曲线的各种应用来看，上述理解是合适的. 不过从直观上考虑，此处并不刻意去强调 φ 与 $\varphi(J)$ 的区别.

(ii) 以任何闭区间取代 $J=[0,1]$，并不会给路概念带来实质性的变化. 约定 $J=[0,1]$，只是为了方便.

(iii) 设 X 是路连通的，$f\in C(X)$，$\alpha,\beta\in f(X)$. 取 $a,b\in X$，使 $f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$；取 X 中的路 φ 连接 a 与 b. 令 $g=f\circ\varphi$，则 $g\in C(J)$，$g(0)=\alpha$，$g(1)=\beta$. 由介值定理，$g(t)$ 取 α 与 β 之间的任何值，因而 $f(x)$ 亦必如此. 这就说明 $f(X)$ 是一区间，从而 X 是连通的. 由此可见，路连通性 $\Rightarrow$ 连通性.

(iv) 路连通概念中，重要的是连接任一对点的路**存在**；至于如何求得或表出所需的路，则未必是要紧的. 例如，若已知 X 中的点 a 与 b 及 b 与 c 均可用路连接，则 a 与 c 亦必可用路连接. 事实上，取 $\varphi,\psi\in C(J,X)$，使 $\varphi(0)=a$，$\varphi(1)=b=\psi(0)$，$\psi(1)=c$，定义

$$h(t)=\begin{cases}\varphi(2t), & 0\leqslant t\leqslant 1/2,\\ \psi(2t-1), & 1/2<t\leqslant 1,\end{cases}$$

则 $h\in C(J,X)$ 就是连接 a 与 c 的路. h 的以上表达式在路连通性问题上不再有其他用处,此处并不是我们所关心的.

(v) 直接看出, X 是路连通的$\Leftrightarrow$ X 中任一点有路与某定点连接.

最简单的路连通集就是其中任一对点均可用"直线段"连接的集, $\mathbf{R}^n$ 中的凸集就是如此. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是一凸集, $x,y\in X$. 令 $\varphi(t)=(1-t)x+ty$, 则显然 $\varphi\in C(J,A)$, 且 $\varphi(0)=x,\varphi(1)=y,\varphi$ 就是 A 中连接 x 与 y 的路. 因此 A 是路连通的,当然也是连通的.

除了路连通集的闭包未必是路连通集(参看例 3.3.8)之外,定理 3.3.3 的结论均可移植到路连通集,且证明更简单.

3.3.7 命题　(i) 设 $A_i\subset X(i\in I)$ 是一族路连通集. 若存在路连通集 $A\subset X$ 与每个 $A_i(i\in I)$ 相交,则 $A\cup(\bigcup A_i)$ 是路连通集. 特别,若 $\bigcap A_i\neq\varnothing$, 则 $\bigcup A_i$ 是路连通集.

(ii) 设 X 是拓扑空间 $X_i(i\in I)$ 的积空间,则 X 是路连通空间$\Leftrightarrow$每个 $X_i(i\in I)$ 是路连通空间.

(iii) 连续映射映路连通集为路连通集.

证　(i) 令 $U=A\cup(\bigcup A_i)$. 任给 $x,y\in U$, 设 $x\in A_i,y\in A_j(i,j\in I)$. 取 $a\in A\cap A_i,b\in A\cap A_j$, 则点对 x 与 a,a 与 b,b 与 y 均可用 U 中的路连接,因而 x 与 y 亦可用 U 中的路连接. 这表明 U 是路连通集.

(ii) 设每个 $X_i(i\in I)$ 是路连通的. 任给 $x,y\in X$, 每个 X_i 中必有连接 x_i 与 y_i 的路 $\varphi_i(i\in I)$, 于是 $\varphi=(\varphi_i)\in C(J,X)$ (依命题2.3.7(vi))就是 X 中连接 x 与 y 的路. 这表明 X 是路连通的. 反之,若 X 是路连通的,则由下面就要证明的(iii)推出每个 X_i 是路连通的.

(iii) 设 $F\in C(X,Y),X$ 是路连通的. 任给 $x,y\in X$, 有 $\varphi\in C(J,X)$, 使 $\varphi(0)=x,\varphi(1)=y$. 令 $g=F\circ\varphi$, 则 $g\in C(J,FX),g(0)=Fx,g(1)=Fy$, 故 g 是 FX 中连接 Fx 与 Fy 的路. 这表明 FX 是路连通的. □

利用命题 3.3.7 很容易构成大量路连通集的例子. 例如,紧接定理 3.3.3 之后举出的那些连通集,实际上都是路连通集. 只是对于 S^n 为路连通集的理由需另有说明,而不能依据 S^n 是 $\mathbf{R}^n$ 的一点紧化这一点. 不过,连通集未必都是路连通集,试看下面这个著名反例.

3.3.8 例(拓扑正弦)　$\mathbf{R}^2$ 的如下子集

$$A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: y=\sin(1/x),0<x\leqslant 1\}\tag{4}$$

称为**拓扑正弦**(见图 3-11). 定义

$$\varphi(x)=(x,\sin(1/x))\quad(x\in I=(0,1]),$$

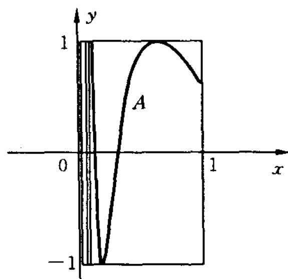


图 3-11

则 $\varphi\in C(I,\mathbf{R}^2)$，故 $A=\varphi(I)$ 是路连通与连通的. 这又可推出 $\overline{A}$ 是连通的(用定理 3.3.3(ii)). 注意，

$$\overline{A}=A\cup(\{0\}\times[-1,1]).$$

今指明 $\overline{A}$ 不是路连通的：$\overline{A}$ 中的点 $(0,0)$ 与 $(1,\sin 1)$ 就不能用 $\overline{A}$ 中的路连接. 事实上，若 $\psi\in C(J,\overline{A})$，$\psi(0)=(0,0)$，$\psi(1)=(1,\sin 1)$，设 $\psi(t)=(x(t),y(t))$，则

$$y(t)=\sin[1/x(t)]\quad(0<t\leqslant 1).$$

当 $t\to 0$ 时 $x(t)\to 0$，而 $y(t)\not\to 0$！

以上例子表明：连通集未必是路连通集，路连通集的闭包亦未必是路连通集.

C. 局部连通性

如同紧性一样，对于连通性亦需考虑相应的局部概念. 但与紧性必蕴涵局部紧性不同，就连通性而言，整体概念与局部概念之间的关系却有些微妙. 可以说，局部连通性是一个有点强的概念，它蕴涵比较丰富的结论，这些结论未必适用于连通空间，因而局部连通性的重要性并不亚于连通性.

另一方面，局部连通性与局部路连通性却有非常类似的结论. 因此，下面的讨论主要围绕局部连通性展开.

3.3.9 定义　(i) 若拓扑空间 X 中每点有一个由连通集(或路连通集)组成的邻域基，则称 X 为**局部连通空间**(或**局部路连通空间**).

(ii) 任给 $x\in X$，以 P_x 记 X 中含 x 的最大连通集，以 $\widetilde{P}_x$ 记 X 中含 x 的最大路连通集，二者分别称为 X 中 x 所属的**连通支**与**路连通支**. 连通支也称为分支或连通分支.

局部连通空间并不少见. 例如，$\mathbf{R}^n$ 中的任何凸子集当作子空间就是局部连通的，实际上还是局部路连通的. 但局部连通性却不能从连通性推出. 例如，设 A 是拓扑正弦(参见例3.3.8)，则 $\overline{A}$ 是连通的，但并非局部连通的：$\overline{A}$ 中的点 $(0,1)$ 就没有由连通集组成的邻域基. 这一事实初看起来有点不可思议，实际上是很自然的. 这好像是地形崎岖的地域中某一点可以绕过一些险阻与它处沟通，但若局限在一狭小范围内，却反而“近在咫尺，互不相通”.

定义 3.3.9 中同时给出的连通支概念，初看起来与局部连通性似无关系，但你很快就会看到，正是借助于连通支概念，才得到了局部连通性的最有用的刻画. 为给下面的讨论作些准备，让我们确立关于连通支的若干简单结论. 利用定理 3.3.3(i)容易建立：

$$P_x=\bigcup\{A:A\subset X \text{ 是含 } x \text{ 的连通集}\}.\tag{5}$$

得到连通支的另一种方法是，在 X 中定义关系～：

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ 与 } y \text{ 同属于 } X \text{ 中的某个连通子集}, \tag{6}$$

则可验证～为等价关系(～显然是自反、对称的,验证传递性时要用到定理3.3.3(i)). 于是 X 依关系～划分为等价类,而 P_x 正是 x 所属的～等价类. 利用这一解释,立得结论: X 是它的互异连通支的不交并; X 是连通的 $\Leftrightarrow X$ 仅有一个连通支. 一般地,空间 X 的连通支愈多,它就分隔得愈厉害,因此可以说连通支的个数量度了空间不连通的程度. 因 $\overline{P}_x$ 是连通的(定理3.3.3(ii)),故必有 $\overline{P}_x = P_x$,即连通支均为闭集. 若 X 仅有有限个连通支,则每个连通支都是既开又闭的集. 对于路连通支,除了它不必为闭集之外,有类似的结论.

现在利用连通支概念给出局部连通性的等价刻画.

3.3.10 命题　对于拓扑空间 X,以下条件互相等价:

(i) X 是局部连通空间;

(ii) X 的非空开集的连通支皆为开集;

(iii) X 有由连通开集组成的拓扑基.

对于局部路连通性有类似结论.

证　(i)⇒(ii). 设 X 是局部连通空间. 取定开集 $G \subset X$ 与 $x \in G$, 设 P_x 是 G 中 x 所属的连通支,今证 P_x 为开集. 由 X 的局部连通性,必有 x 的连通邻域 V,使得 $V \subset G$, 因而必 $V \subset P_x$, 这表明 P_x 是 x 的邻域. 这一结论自然亦适用于任何 $y \in P_x$ (注意 $P_y = P_x$),因而 P_x 是开集.

(ii)⇒(iii). 以 $\mathscr{B}$ 记 X 中非空开集的连通支之全体,条件(ii)表明 $\mathscr{B}$ 是开集族,它显然构成 X 的拓扑基.

(iii)⇒(i)是平凡的.

对于局部路连通性相应结论的证明是类似的.　□

对于局部连通性的应用,命题3.3.10(ii)是最值得注意的.

3.3.11 推论　(i) 局部连通空间的连通支是既开又闭的集.

(ii) 局部路连通空间中的连通开集是路连通的.

证　(i) 是明显的.

(ii) 设 X 是局部路连通空间, $G \subset X$ 是连通开集. 因 G 的路连通支均为开集,而 G 是连通的,故 G 只能有一个路连通支,因而 G 是路连通的.　□

通常称连通开集为**区域**. 于是推论3.3.11(ii)的意思相当于:局部路连通空间中的区域必定是路连通的. 特别, $\mathbf{R}^n$ 中的区域是路连通的. 在经典分析中,实际上都隐蔽地认可了这一结论. 在我们的直觉经验中,将连通性看作可用连续路径连接的这一印象,多半来自对 $\mathbf{R}^n$ 中开集的观察. 就 $\mathbf{R}^n$ 或一般局部路连通空间中的开集而言,如推论3.3.11(ii)所指明的,连通性与路连通性这两个概念确无区别. 但在其他情况下就未必如此了.

下面的结果可与定理3.2.16相对照.

3.3.12 定理　(i) 局部连通性是开遗传的，即局部连通空间的开子空间是局部连通的.

(ii) 设 X 是拓扑空间 $X_i(i \in I)$ 的积空间，则 X 是局部连通空间 $\Leftrightarrow$ 每个 X_i 是局部连通空间，且除至多有限个例外，X_i 是连通空间. 因此，局部连通性是有限可乘的.

(iii) 局部连通空间的商空间是局部连通空间.

对于局部路连通性有类似结论.

证　(i) 是平凡的.

(ii) 设 X 是局部连通空间，则由下面要证的(iii)知 $X_i(i \in I)$ 是局部连通的. X 中必有一非空连通开集 G (用命题3.3.10). G 含有一个如下的基开集：

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} P_{i_k}^{-1} V_k,$$

其中 V_k 是 $X_{i_k}(1 \leqslant k \leqslant n)$ 中的非空开集. $\forall\, i \in I \backslash \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$，有

$$P_i G \supset P_i V = X_i,$$

这表明 $X_i = P_i G$ 是连通的. 其次设每个 X_i 是局部连通空间，且除至多有限个例外，X_i 是连通的. 今证 X 是局部连通空间. 任取 $x \in X$ 与 x 的开邻域 V，可设 $V = \bigcap P_{i_k}^{-1} V_k, V_k \subset X_{i_k}$ 为开集，$1 \leqslant k \leqslant n$. 不妨设当 $i \neq i_1, i_2, \cdots, i_n$ 时 X_i 连通. 取 x_{i_k} 的连通邻域 $U_k \subset V_k$，则 $U = \bigcap P_{i_k}^{-1} U_k$ 是 x 的连通邻域(用定理3.3.3(iii))，$U \subset V$. 这表明 X 是局部连通的.

(iii) 设 X 是局部连通空间，$F: X \to Y$ 是一商映射，今证 Y 是局部连通的. 任给 $y \in Y$ 与 y 的开邻域 V，设 P_y 是 V 的含 y 的连通支，今证 P_y 是开集；而为此又只要证 $F^{-1}P_y$ 是开集(用定义2.3.13). 任给 $x \in F^{-1}P_y$，以 P_x 记 $F^{-1}V$ 的含 x 的连通支，则 P_x 是开集(用命题3.3.10). 因 $FP_x \subset V, FP_x$ 连通，$Fx \in P_y \cap FP_x$，故 $FP_x \subset P_y$(用定理3.3.3(i))，从而 $P_x \subset F^{-1}P_y$. 这表明 $F^{-1}P_y$ 是开集，如所要证.

对于局部路连通性相应结论的证明是类似的. □

用一些例子来解释以上结果.

3.3.13 例　(i) $\mathbf{R}^n$ 的任何开子空间是局部连通(也是局部路连通)的，这提供了局部连通空间的最主要的直观例子.

(ii) 由定理3.3.12(ii)显然推出：同时为连通与局部连通的一族拓扑空间的积空间是连通与局部连通的. 因此，任给实区间 I 与非空集 Ω, I^{Ω} 是连通与局部连通的. 实际上，I^{Ω} 是路连通与局部路连通的，特别 $\mathbf{R}^{\Omega}$ 就是如此.

(iii) 因单点集平凡地是路连通的，故离散拓扑空间 X 是局部路连通且局部连通的，它的连通支就是单点集，注意单点集是开集(对照命题3.3.10(ii)).

连通支均为单点集的空间称为**完全不连通空间**或全断空间. 除了离散拓扑

空间之外，完全不连通空间的最重要的例子是：$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ 及 Cantor 集（依通常拓扑）等，这些空间都不是局部连通的.

习 题

101. X 是 T_2 空间 $\Leftrightarrow$ 当 $x,y\in X, x\neq y$ 时有 $U\in\mathscr{N}_x$ 使 $y\bar{\in}\bar{U}\Leftrightarrow\forall x\in X$，有 $\{x\}=\bigcap\{\bar{U}: U\in\mathscr{N}_x\}$.

102. 设 X 是 T_2 空间，则 X 中任意 n 个点有互不相交的邻域.

103. 设 X 是 T_2 空间，则其中的拓扑必包含有限补拓扑.

104. 有限 T_2 空间必为离散空间.

105. 无限 T_2 空间中必存在无限个互不相交的非空开集.

106. 设 X 是 T_2 空间，$A\subset X, x\in A'$，则 x 的任何邻域含 A 中无限个点.

107. 设 X 是 T_2 空间，$A\subset X$ 是有限集，则 $A'=\varnothing$.

108. 设 X 是有限补拓扑空间，则 X 是 T_2 空间 $\Leftrightarrow X$ 是有限集.

109. 设 X 是可数补拓扑空间，则 X 是 T_2 空间 $\Leftrightarrow X$ 是可数集.

110. 设 $X=\prod X_i$ 是 T_2 空间，则每个 X_i 是 X 的闭子空间.

111. 设 X 是 T_2 空间，$F: X\to Y$ 是开或闭的双射，则 Y 是 T_2 空间；若 (X,τ) 是 T_2 空间，$\tau\subset\tau_1$，则 (X,τ_1) 是 T_2 空间.

112. 设 $F,G\in C(X,Y)$，Y 是 T_2 空间，则 $A=\{F=G\}$ 是闭集；若 X 是 T_2 空间，$F\in C(X,X)$，则 $\{x: Fx=x\}$ 是闭集.

113. 设 $F,G\in C(X,Y)$，Y 是 T_2 空间，$\overline{\{F=G\}}=X$，则 $F\equiv G$.

114. 设 X 是第一可数空间，则 X 是 T_2 空间 $\Leftrightarrow X$ 中的收敛序列有唯一极限.

115. 设 X 是第一可数的正则空间，$x\in X$，则 x 有可数邻域基 $\{B_n\}$，使得 $\bar{B}_{n+1}\subset B_n (n\geqslant 1)$.

116. 设 $U_r(x)=B_r(x)\backslash\{y\in\mathbf{R}^2: y_1=x_1, y_2\neq x_2\}$，则 $\mathbf{R}^2$ 依拓扑基 $\{U_r(x): x\in\mathbf{R}^2, r>0\}$ 生成的拓扑是非正则的 T_2 空间.

117. 设 X 是正则空间，$A\subset X$ 是一闭集，则 $A=\bigcap\{V: V\in\mathscr{N}_A\}$.

118. 设 X 是一全正则空间，$A\subset X$ 是一非空闭集，$x\in A^c$，则存在 $f\in C(X,J)$ 使得 $\{x\}=f^{-1}(1), f(A)=0$ 的充要条件是 $\{x\}$ 是开集的可数交.

119. 设 X 是全正则空间，则 $\overline{C(X)}=\mathbf{R}^X$.

120. $X\times J$ 是正规空间 $\Rightarrow X$ 是正规空间.

121. 设 X 是正规空间，A 是 X 的闭子空间，$f\in C(A,\mathbf{R}^n)$，则 f 有扩张 $g\in C(X,\mathbf{R}^n)$.

122. 紧集与闭集之交为紧集，紧闭集之交是紧闭集，紧集之交不必为紧集，T_2 空间中紧集之交为紧集.

123. 相对紧集的有限并与任意交为相对紧集.

124. 设 $\mathscr{A}$ 是紧闭集族，$\bigcap\mathscr{A}\subset U$，$U$ 是开集，则有有限子族 $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$，使得 $\bigcap\mathscr{B}\subset U$.

125. 有限补拓扑空间 X 是紧的.

126. 含无限多个点的可数补空间 X 是非紧的.

127. 设 $X=\prod X_i$，有无限多个 X_i 非紧，$K\subset X$ 是紧集，则 $K^\circ=\varnothing$.

128. 设 $X=\prod X_i$ 是紧 T_2 空间，则投影 $P_i: X \to X_i$ 为闭映射.

129. 设 τ,τ_1 是 X 上的拓扑，(X,τ) 是紧的，$\tau \supset \tau_1$，则 (X,τ_1) 亦是紧的；若 (X,τ_1) 是 T_2 空间，则 $\tau=\tau_1$.

130. 设 X 是紧空间，Y 是 T_2 空间，若 $F: X \to Y$ 是连续单射，则 F 是拓扑嵌入；若 F 是连续满射，则 F 是商映射.

131. 设 X 是 T_2 空间，$K\subset X$ 是紧集，$U,V\subset X$ 是开集，$K=U\cup V$，则 $K=A\cup B$，$A\subset U, B\subset V$ 为紧集.

132. (Wallace 定理)设 $A\subset X$ 与 $B\subset Y$ 为紧集，W 是 $A\times B$ 在 $X\times Y$ 中的邻域，则有 $U\in\mathscr{N}_A$ 与 $V\in\mathscr{N}_B$，使得 $U\times V\subset W$.

133. 设 W 是 $\{x_0\}\times Y$ 在 $X\times Y$ 中的一个邻域，Y 为紧空间，则有 x_0 的邻域 U，使得 $U\times Y\subset W$.

134. 设 X 是正则空间，$A\subset X$ 为紧集，$B\subset X$ 为闭集，$A\cap B=\varnothing$，则 A 与 B 可邻域分离.

135. 设 X 是全正则空间，$A\subset X$ 为紧集，$B\subset X$ 为闭集，则 A 与 B 可函数分离.

136. 设 $F\in C(X\times Y,Z)$，$A\subset X$ 与 $B\subset Y$ 是紧集，W 是 $F(A\times B)$ 的开邻域，则存在 $U\in\mathscr{N}_A$ 与 $V\in\mathscr{N}_B$，使得 $F(U\times V)\subset W$.

137. (闭图像定理)设 $F: X\to Y$，Y 是紧 T_2 空间，则 F 连续 $\Leftrightarrow G\triangleq \mathrm{Gr}\,F$ 是闭集.

138. 设 $f\in C(X\times Y)$，Y 是紧空间，$\varphi(x)=\sup\limits_{y\in Y} f(x,y)$，则 $\varphi\in C(X)$.

139. 设 X 是紧空间，$\{f_n\}\subset C(X)$，$f_n \rightrightarrows f$，则 $f(X)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} f_k(X)}$.

140. 设 X 是紧空间，$F\subset C(X)$ 对乘法运算封闭，$\forall x\in X$，存在 $f\in F$ 在 x 的某邻域内恒为零，则 $f\equiv 0$ 属于 F.

141. 序列紧、可数紧与聚点紧是闭遗传的；序列紧与可数紧在连续映射下保持不变.

142. 序列紧是可数可积的.

143. 设 X 是序列紧或可数紧空间，则每个 $f\in C(X)$ 取得最大与最小值.

144. 设 X 是有无限个点的可数补拓扑空间，则 X 非序列紧.

145. 设 $S=\{0,1\}^\omega$，$X=\{0,1\}^S$，则 X 是非序列紧的紧空间.

146. X 是可数紧空间 $\Leftrightarrow X$ 的每个可数无限子集有聚点.

147. T_2 空间 X 是可数紧的 $\Leftrightarrow X$ 的每个无限可数开覆盖有真子覆盖.

148. 设 X 是可数紧空间，Y 是第一可数空间，则投影 $P: X\times Y\to Y$ 是闭映射.

149. 设 X 是第一可数的可数紧 T_2 空间，则 X 是正则空间.

150. 设 X 是正规空间，则 X 是可数紧的 $\Leftrightarrow X$ 是伪紧的，这意味着每个 $f\in C(X)$ 有界.

151. 设 X 是可数紧空间，Y 是第一可数的 T_2 空间，$F: X\to Y$ 是连续双射，则 F 是同胚.

152. 设 X 是 T_2 空间，$A\subset X$ 是LCH，则有开集 $V\subset X$ 与闭集 $F\subset X$，使 $A=V\cap F$.

153. 设 X 是 T_2 空间，Y 是 X 的局部紧的稠子空间，则 Y 是开集.

154. LCH 在连续闭映射下的像不必是LCH.

155. 设 X 是第二可数的LCH，则存在相对紧开集的升列 $\{U_n\}$，使得 $X=\bigcup U_n$.

156. 设 $X=(0,1)$ 上采用拓扑 $\tau=\{X,\varnothing,(1/n,1): n\in\mathbf{N}\}$，则 X 中每点有紧邻域基，但每点无闭邻域基.

157. 设 X 是局部紧度量空间，$A \subset X$ 是紧集，则存在 $\varepsilon > 0$，使得 $V_\varepsilon = \{x \in X : d(x, A) \leqslant \varepsilon\}$ 是紧集.

158. 设 X 是非紧的LCH，则 X 是第二可数的 $\Leftrightarrow X_\infty$ 是第二可数的.

159. 设 X 与 Y 是LCH，$X \cong Y$，则 $X_\infty \cong Y_\infty$.

160. 设 X 是非紧的LCH，则 X 是紧集的可数并 $\Leftrightarrow \infty$ 在 X_∞ 中有可数邻域基.

161. X 是连通的 $\Leftrightarrow X$ 不是两个互相隔离的非空集之并，集 A 与 B 互相隔离意味着 $\overline{A} \cap B = \varnothing = A \cap \overline{B}$.

162. 设 $\varnothing \neq A \subset X$，则 A 连通 $\Leftrightarrow A$ 不是两个互相隔离的非空集之并.

163. 设 $A, B \subset X$ 互相隔离，$A \cup B$ 是开(或闭)集，则 A 与 B 均为开(或闭)集.

164. 设 $A, B \subset X$ 是开(或闭)集，则 $A \backslash B$ 与 $B \backslash A$ 互相隔离.

165. 设 S 是连通集，$S \subset A \cup B$，A 与 B 互相隔离，则 $S \subset A$ 或 $S \subset B$.

166. 设 $S \subset X$ 是连通集，$A \subset X$ 是既开又闭的集，$S \cap A \neq \varnothing$，则 $S \subset A$.

167. 设 $A \subset X$，则 A 不连通 $\Leftrightarrow$ 存在开集 $U, V \subset X$，使得 $A \subset U \cup V$，$U \cap V \subset A^c$，$A \cap U \neq \varnothing \neq A \cap V$.

168. 设 $A \subset X$ 连通，$B \subset X$，$A \cap B \neq \varnothing \neq A \backslash B$，则 $A \cap \partial B \neq \varnothing$.

169. 设 $X = A \cup B$，A 与 B 为闭集，X 与 $A \cap B$ 连通，则 A 与 B 均连通.

170. 设 X 是一连通的T_2 空间且至少含两点，则存在非空连通集 A, B 使得 $X = A \cup B$ 且 $A \neq B$.

171. 设 $A_i (i \in I)$ 是一族两两不隔离的连通集，则 $A = \bigcup A_i$ 是连通集.

172. 设 $\mathscr{A}$ 是一族连通集，$\forall A, B \in \mathscr{A}$，存在一个链 $A = A_0, A_1, \cdots, A_n = B$，$A_i \in \mathscr{A}$，$A_i$ 与 $A_{i+1} (0 \leqslant i < n)$ 不隔离，则 $\mathscr{A}^\#$ 是连通集.

173. 设 X 中每一对点含于一个连通集，则 X 连通.

174. 设 X 与 Y 是连通空间，A 与 B 分别为 X 与 Y 的真子集，则 $(X \times Y) \backslash (A \times B)$ 是连通集.

175. 设 $X = \prod X_i$，每个 X_i 连通. 利用题66 证 X 连通.

176. 设 Y 是不少于两点的离散空间，则 X 连通 $\Leftrightarrow \forall f \in C(X, Y)$，$f \equiv \text{const}$.

177. 设 X 是可数的连通空间，则每个 $f \in C(X)$ 为常数函数；X 不是度量空间，除非它是单点空间.

178. 设 X 是含无限个点的有限补拓扑空间，则 X 连通.

179. 设 X 是含不可数个点的可数补拓扑空间，则 X 连通.

180. 设 $n > 1$，$A \subset \mathbf{R}^n$ 是可数集，则 A^c 连通.

181. 设 $n > 1$，$\mathbf{R}^n$ 中至少有一个坐标为无理数的点构成连通集.

182. $\mathbf{R}^2$ 中至少有一个坐标为有理数的点构成连通集.

183. 设 $n > 1$，$A \subset S^n$ 为可数集，则 $S^n \backslash A$ 是连通集.

184. 设 $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = nx, n \in \mathbf{N}\}$，$B \subset \{0\} \times \mathbf{R}$，则 $A \cup B$ 是连通集.

185. 设 X 是 T_2 空间，$\mathscr{A} \subset 2^X$ 是一族紧集，$\mathscr{A}^*$ 只含连通集，则 $\bigcap \mathscr{A}$ 是连通集.

186. 设 X 是一个紧 T_2 空间，$x \in X$，$\mathscr{A}$ 是 x 的既开又闭邻域之全体，则 $C = \bigcap \mathscr{A}$ 是连通集.

187. 连通集的降列的交不必连通.

188. 设 X 是 T_2 空间, $A \subset X$ 是非空连通集,则 A 为单点集或无限集.

189. 设 X 是正规空间, $A \subset X$ 是非空连通集,则 A 为单点集或不可数集.

190. 设 X 是全正则空间, $A \subset X$ 是多于一点的连通开集,则 A 是不可数集.

191. 设 X 是可数的LCH,则 X 为非连通空间,除非 X 是单点空间.

192. 设 $f \in C(\mathbf{R}^n)$, 则最多有两点 $a, b \in \mathbf{R}$, 使 $f^{-1}(a)$ 与 $f^{-1}(b)$ 为非空可数集.

193. 设 $f \in C(\mathbf{R}^n)$ 取到正值与负值,则 f 有不可数多个零点.

194. 设 X 是多于一点的连通度量空间,则有 $f \in C(X)$, 使 $f(X) = J = [0,1]$.

195. 设 $n > 1$, 则 $\mathbf{R}^n$ 不能拓扑嵌入 $\mathbf{R}$ 与 S^1.

196. 设 $f : [a,b] \cong [c,d], a < b, c < d$, 则 $f(a) = c, f(b) = d$ 或 $f(a) = d, f(b) = c$.

197. 设 $J = [0,1] \cong A \times B$, 则 A 或 B 是单点空间.

198. S^n 是路连通的.

199. 平凡拓扑空间是路连通的.

200. $\mathbf{R}$ 依有限补拓扑是路连通的.

201. 设 $A = \{(x,y) : y = nx, n \in \mathbf{N}\}, B = \{0\} \times [1,2]$, 则 $A \cup B$ 连通而非路连通.

202. 空间 X 是局部连通的 $\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall V \in \mathscr{N}_x, V$ 的含 x 的连通支是 x 的邻域.

203. 连通的局部连通空间是路连通的.

204. 设 $X_i (i \in I)$ 是一族局部连通的连通空间,则 $X = \prod X_i$ 是局部连通的连通空间.

205. $X = \{0,1\}^{\mathbf{R}}$ 不是局部连通的.

206. $A = \{1/n : n \in \mathbf{N}\}$ 是局部路连通的,而 $\bar{A}$ 不是局部连通的.

207. $X = S^1 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} S^1 \right) \cup ([0,1] \times \{0\})$ 是路连通而非局部连通的.

208. 设 $A \subset X$ 是既开又闭的非空连通集,则 A 是 X 的连通支.

209. 设 $A \subset X$ 是连通开集,则 A 是 $(\partial A)^c$ 的连通支.

210. $\mathbf{R}$ 依右区间拓扑(见题9)是完全不连通的.

211. $\mathbf{R}$ 中任一稠集的补是完全不连通的.

212. 设 $x = (x_i) \in X = \prod X_i, P_x$ 是 X 中 x 所属的连通支, P_{x_i} 是 X_i 中 x_i 所属的连通支,则 $P_x = \prod P_{x_i}$.

213. 完全不连通性是可积的.

214. 可分局部连通空间 X 是可数个连通开集的不交并.

215. 设 $F \in C(X,Y), P_x (x \in X)$ 与 P_{Fx} 分别记 X 与 Y 的连通支,则 $\tilde{F} : P_x \to P_{Fx}$ 是一映射;若 $F : X \cong Y$, 则 $\tilde{F}$ 为双射.

216. 设 $F \in C(X,Y), y \in Y, P_y$ 是 Y 的含 y 的连通支,则 $F^{-1}P_y$ 是 X 的一些连通支的并.

217. 设 X 是紧 T_2 空间, $x \in X, \mathscr{A}$ 是 x 的既开又闭的邻域之全体,则 $C = \bigcap \mathscr{A}$ 是 X 的含 x 的连通支.

218. 设 X 是局部连通的紧空间, Y 是 T_2 空间, $F : X \to Y$ 是连续满射,则 Y 是局部连通的.

219. 设 X 是局部连通的紧空间,则 X 仅有有限个连通支.

220. $X = (\mathbf{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbf{R})$ 不同胚于 $\mathbf{R}$.

第4章　度量空间与一致空间

在本书中，度量空间几乎是与拓扑空间同时引入的. 而且，在前两章的大多数地方，我们都注意联系度量空间的特殊结论. 因此，对于度量空间已不能说很陌生了. 不过，到现在为止，度量空间至多只是附带提及而已，现在该让它充当主角了. 度量空间毕竟涵盖了应用上最重要的抽象空间，它不应只是为解释拓扑概念提供例证，而值得作系统的专门考察. 一方面，需要探讨度量空间所特有的那些拓扑结论；同时，还需考虑那些实质上与度量有关的问题，它们在一般拓扑空间理论中并无其地位.

在处理了度量空间理论的基本内容之后，本章的讨论将朝两个有点相反的方向展开. 一方面，我们要完成从度量空间到更一般的一致空间的过渡，后者对于一些不能包容于度量空间之内但仍有重要应用价值的抽象空间是一个很好的概括. 另一方面，我们要将讨论引向一个不那么抽象的方向，即考察某些典型的函数空间. 这不仅是为诠释理论提供例证，而且使我们更接近于所建立理论的具体应用，至少可看作朝向应用的一个窗口.

4.1　度量空间

如我们已提到的，度量空间并非只是拓扑空间的特例，它所具有的度量结构并不能被它生成的拓扑结构所包容，而只能在一个独立展开的理论中得到完全的解释. 度量空间理论包含了丰富的内容，本节仅涉及几个最基本的问题，即完备性、全有界性、第二纲性及度量化问题，它们在应用中是最常见的. 在学习这些内容时，应特别注意与前两章的相关部分联系起来.

本节中，X，Y 等通常记给定的度量空间，其中的度量在未作说明时都记作 d.

A. 某些基本概念

在进入本节的主要内容之前，还要就涉及度量的一些基本概念作某些补充. 在形式上，我们将仿照第2章中处理拓扑概念的一些作法，这种对照将有助于对概念的理解与把握. 现在所面临问题的复杂之处在于：度量空间兼有度量与拓扑两种结构，二者密切相关但并非完全相互决定.

4.1.1 定义 设 X 与 Y 是两个度量空间.

(i) 设 $F: X \to Y$ 是一映射. 若 F 满足如下条件:

$$\begin{cases}\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X, \\ d(x,y) < \delta \Rightarrow d(Fx,Fy) < \varepsilon,\end{cases} \tag{1}$$

则说 F **一致连续**. 若 F 是一双射且 F 与 F^{-1} 均一致连续,则称 F 为一个**一致同构**. 当从 X 到 Y 的一致同构存在时,说 X 与 Y 是一致同构的.

(ii) 若 $F: X \to Y$ 是一双射,且满足条件:

$$d(Fx,Fy) = d(x,y) \quad (x,y \in X), \tag{2}$$

则称 F 为一个**等距同构**. 当从 X 到 Y 的等距同构存在时,说 X 与 Y 是等距同构的.

(iii) 设 d 与 d_1 是 X 上的两个度量. 若单位映射

$$1_X: (X,d) \to (X,d_1)$$

是一致同构,则说度量 d 与 d_1 **一致等价**;若上述映射是同胚,则说度量 d 与 d_1 **拓扑等价**.

文献中说到等价度量时,通常指拓扑等价.

容易看出,一致连续性条件(1)等价于:

$$d(x_n,y_n) \to 0 \Rightarrow d(Fx_n,Fy_n) \to 0 \quad (x_n,y_n \in X). \tag{1$'$}$$

因此, X 上的度量 d 与 d_1 一致等价的充要条件为

$$d(x_n,y_n) \to 0 \Leftrightarrow d_1(x_n,y_n) \to 0 \quad (x_n,y_n \in X). \tag{3}$$

注意应将条件(3)区别于拓扑等价条件:

$$d(x_n,x) \to 0 \Leftrightarrow d_1(x_n,x) \to 0 \quad (x_n,x \in X), \tag{4}$$

条件(4)中的 x 相对于 x_n 是固定的. 直接由条件(1)或(1)$'$看出,一致连续 $\Rightarrow$ 连续. 因此,

$$\text{等距同构} \Rightarrow \text{一致同构} \Rightarrow \text{同胚}. \tag{5}$$

度量空间在等距同构与一致同构之下保持不变的性质,分别称为**度量性质**与**一致拓扑性质**. 因此由式(5)有

$$\text{度量性质} \supset \text{一致拓扑性质} \supset \text{拓扑性质}^{①}.$$

互相等距同构的度量空间不必区别;互相同胚的度量空间作为拓扑空间可不加区别,但作为度量空间则可能差别甚大. 对于度量空间所关注的是拓扑性质、一致拓扑性质还是度量性质,取决于需要. 如果仅关注拓扑性质与一致拓扑性质,那么度量 d 就可在一致等价的范围内依方便进行选择,而不必拘泥于某一特定

---

① 注意,依此关系度量性质最多,一致拓扑性质次之,拓扑性质最少;一致拓扑性质包括了拓扑性质. 不过,在习惯上,当我们说到一致拓扑性质时,主要指那些不能归入拓扑性质之内的一致拓扑性质,下面论及的完备性与全有界性就是如此.

度量.在选择一致等价度量时,常用到如下简单结果.

4.1.2 引理　设 $\varphi(t)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的非负增函数,它在 $t=0$ 处右连续,$\varphi(t)=0 \Leftrightarrow t=0$,且满足如下次可加条件:

$$\varphi(s+t) \leqslant \varphi(s)+\varphi(t) \quad (s,t \geqslant 0).$$

若 d 是 X 上的度量,则 $d_1=\varphi\circ d$ (即 $d_1(x,y)=\varphi(d(x,y)),\forall\, x,y\in X$)亦是 X 上的度量,且与 d 一致等价.

证　易直接验证 d_1 满足距离公理$(D_1)\sim(D_3)$(依定义2.1.14).由 φ 在 $t=0$ 右连续有 $0\leqslant t_n\to 0 \Rightarrow \varphi(t_n)\to 0$. 若 $t_n\geqslant 0, t_n\not\to 0$, 则有 $\delta>0$ 及任意大的 n 使 $t_n\geqslant\delta$, 从而 $\varphi(t_n)\geqslant\varphi(\delta)>0$, 可见不可能 $\varphi(t_n)\not\to 0$. 这就证得

$$t_n\to 0 \Leftrightarrow \varphi(t_n)\to 0 \quad (t_n\geqslant 0).$$

以 $t_n=d(x_n,y_n)(x_n,y_n\in X)$ 代入得出等价关系(3),因此 d_1 是 X 上与 d 一致等价的度量. □

满足引理4.1.2中条件的 $\varphi(t)$ 甚多,例如可取

$$\sqrt{t},\quad \ln(1+t),\quad t/(1+t),\quad t\wedge 1 \text{ 等}.$$

通常我们将取 $\varphi(t)=t\wedge 1$,它极简单且满足 $\varphi(t)\leqslant 1$,在运用时是很方便的.

试看一些例子.

4.1.3 例　(i) $\mathbf{R}^n$ 中的度量.任给 $x\in\mathbf{R}^n$,认定 $x=(x_i)$. 定义

$$\begin{cases} d_p(x,y)=\|x-y\|_p \quad (1\leqslant p\leqslant\infty), \\ \|x\|_p=\left(\sum|x_i|^p\right)^{1/p}(1\leqslant p<\infty), \\ \|x\|_\infty=\max\limits_i|x_i|. \end{cases} \tag{6}$$

因可验证(用微分法不难证此):

$$\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_p\leqslant\|x\|_1\leqslant n\|x\|_\infty \quad (x\in\mathbf{R}^n),$$

故不难看出,度量 $d_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 互相一致等价,因而都一致等价于Euclid 度量 $d=d_2$ (依 2.1 节式(26)),因此由 d_p 生成的拓扑就是通常拓扑.在度量族 $\{d_p:1\leqslant p\leqslant\infty\}$ 中,并非人们习惯上认为的唯有Euclid 度量 d_2 具有现实性.例如,在棋盘形街道中行走的人所测得的距离就是 d_1 而非 d_2!

(ii) 在 $\mathbf{R}$ 上定义

$$d^*(x,y)=|\arctan x-\arctan y| \quad (x,y\in\mathbf{R}),$$

则易验证 d^* 是 $\mathbf{R}$ 上的一个度量.因 $\arctan x$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续且有连续的反函数,故

$$x_n\to x \Leftrightarrow d^*(x_n,x)\to 0 \quad (x_n,x\in\mathbf{R}),$$

这表明度量 d^* 与 $\mathbf{R}$ 上的 Euclid 度量 d 拓扑等价.另一方面,取 $x_n=\cot(2/n)$, $y_n=\cot(1/n)$, 则

$$d^*(x_n,y_n)=1/n\to 0,$$

$$|x_n - y_n| = \frac{n^{-1}}{\sin^2(\theta/n^2)} \to \infty,$$

其中 $1 < \theta < 2$（用中值定理）. 可见 d 与 d^* 并非一致等价.

现在考虑度量空间的构成. 若 (X,d) 是一度量空间，$\varnothing \neq S \subset X$，则 S 依度量 d 显然也是一度量空间，称为 X 的度量子空间，简称为子空间. 任给序列 $\{x_n\} \subset S, x \in S$，在 S 中 $x_n \to x$ 与在 X 中 $x_n \to x$ 的条件都是 $d(x_n, x) \to 0$，因此 S 中的度量拓扑就是相对拓扑（参看命题 2.3.2(iv)）. 关于度量子空间，暂时就没有什么好说的了.

其次考虑度量空间的积空间. 设 $(X_i, d_i)(i \in I)$ 是一族度量空间，$X = \prod X_i$，任给 $x \in X$，认定 $x = (x_i)$；$P_i : X \to X_i$ 记投影. 首先设 $I = \mathbf{N}$，定义

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}[d_i(x_i, y_i) \wedge 1] \quad (x, y \in X). \tag{7}$$

可直接验证 d 满足距离公理，因而是 X 上的一个度量. 对于度量(7)，以下不等式是关键的：

$$\begin{cases} d(x,y) \leqslant \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} d_i(x_i, y_i) + \dfrac{1}{2^n}, & \text{(8a)} \\ d_i(x_i, y_i) \wedge 1 \leqslant 2^i d(x,y). & \text{(8b)} \end{cases}$$

设 $x^k, y^k \in X(k \in \mathbf{N})$. 若 $d_i(x_i^k, y_i^k) \to 0 (k \to \infty, i \in \mathbf{N})$，则由式(8a)推出 $d(x^k, y^k) \to 0 (k \to \infty)$. 反之，若 $d(x^k, y^k) \to 0 (k \to \infty)$，则由式(8b)推出 $d_i(x_i^k, y_i^k) \to 0 (k \to \infty, i \in \mathbf{N})$. 这就得到：

$$d(x^k, y^k) \to 0 \Leftrightarrow \forall\, i \in \mathbf{N} : d_i(x_i^k, y_i^k) \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{9}$$

在式(9)中取 $y^k = x \in X$ 得到：

$$d(x^k, x) \to 0 \Leftrightarrow \forall\, i \in \mathbf{N} : d(x_i^k, x_i) \to 0 \quad (k \to \infty). \tag{10}$$

结合式(1)′与式(9)，推出投影

$$P_i : (X, d) \to (X_i, d_i) \quad (i \in \mathbf{N})$$

皆一致连续. 而由式(10)则得出：(X,d) 中的度量拓扑就是积拓扑（用命题 2.3.7(iv)，注意 X_i, X 都是第一可数空间，因而只需考虑序列收敛）. 这一事实显示出度量定义式(7)的合理性，下面讨论可数个度量空间的积空间时，总认定其中使用依式(7)定义的度量 d.

若 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$，则可更简单地定义

$$d(x,y) = \sum_i d_i(x_i, y_i) \quad (x, y \in X), \tag{11}$$

同样可验证与前面类似的结论，不必细述.

若 I 是不可数的，且每个 X_i 多于一点，则由定理 2.4.7(ii) 得出 X 依积拓扑不是第一可数空间，因而不可能在 X 中定义一度量，使其度量拓扑为积拓扑. 这

种情况自然不需再予考虑.

在2.4B中,我们界定了拓扑性质的遗传性、可乘性与在连续映射下的不变性等用语.在谈到度量空间的拓扑性质时,这些用语当然仍然适用.我们现在需要的是再进一步,对于一致拓扑性质,亦可使用遗传性、有限或可数可乘性、在一致连续映射下的不变性等术语,它们的意义是自明的,因而无需详细界定.

在前面两章中,我们已经提及度量空间的第一(或第二)可数性、可分性、正规性、紧性等拓扑性质,对于其中某些性质,例如紧性,还要作进一步的考虑.但说到一致拓扑性质,则完全是一个新的对象,现在还不清楚,它究竟具体指哪些性质.下面就来考虑第一个(也是最重要的一个)一致拓扑性质,即下段所说的完备性.

B. 完备性

你想必对如下分析定理有深刻印象:一实数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是

$$\lim_{m,n\to\infty}|x_m - x_n| = 0. \tag{12}$$

这就是著名的**Cauchy 收敛原理**,而式(12)就是**Cauchy 条件**.从逻辑上说,在经典微积分学的理论基础中,唯一重要的东西就是Cauchy 收敛原理[①].条件(12)在度量空间 X 中的推广就是

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_m,x_n) = 0. \tag{13}$$

不妨也称式(13)为Cauchy 条件.但现在能否说 $\{x_n\}\subset X$ 收敛的充要条件是式(13)成立?令人遗憾的是,答案是否定的,可证实这一点的反例可信手拈来.例如取 $X=(0,1)\subset\mathbf{R}$,其中采用平常的度量,令 $x_n = 1/n(n\in\mathbf{N})$,则 $\{x_n\}$ 显然满足Cauchy 条件(13),但它在 X 中却不收敛.如果来自分析的经验能说明问题,那么你可以想象,不能用Cauchy 收敛原理的度量空间大概是不便于应用的,至少在某些问题上应将它们排除出去.这就需要引进如下概念.

4.1.4 定义　若度量空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 满足条件(13),则称它为**Cauchy 序列**.若 X 中的Cauchy 序列均收敛,则称 X 为完备度量空间,简称为**完备空间**.

若 $\{x_n\}\subset X$ 是收敛序列,则直接看出它必满足条件(13).因此可将完备性条件改述成:序列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它满足Cauchy 条件(13).这就可以说,**完备空间正是使Cauchy 收敛原理成立的度量空间**.经典的Cauchy 收敛原理则是:$\mathbf{R}$ 是一个完备度量空间.以上类比又使我们自然期待:凡经典Cauchy 收敛原理发生作用的问题,在完备度量空间中也应有类似的解法.现代分析数学中,确实有相当一部分收敛性问题的解决依赖于一定度量空间的完备性.

用简单的例子就可指出,完备性不是拓扑性质.例如,

---

① 你会说聚点原理或区间套定理等也是重要的.但你将很快看到,它们都与Cauchy 收敛原理等价!

$$f: \mathbf{R} \to (-1,1), \quad x \to \frac{2}{\pi}\arctan x \tag{14}$$

显然是一个同胚，但$(-1,1)$却不是完备的. 尽管如此，还是可用研究拓扑性质的某些思路来考察完备性. 例如，下面首先给出完备性的等价刻画，然后考虑某种“不变性”.

4.1.5 定理　对于度量空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是完备的；

(ii) 若 $\{B_n\}$ 是 X 中非空闭集的降列，$\operatorname{diam} B_n \to 0$，则 $\bigcap B_n \neq \varnothing$.

(iii) X 中的Cauchy 网皆收敛.

一个网 $\{x_t\} \subset X$ 是**Cauchy 网**意味着它满足Cauchy 条件：

$$\lim_{s,t} d(x_s, x_t) = 0, \tag{15}$$

即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_0, \forall s,t \geqslant t_0, \text{有 } d(x_s,x_t) < \varepsilon. \tag{15$'$}$$

证　(i)⇒(ii). 取 $x_n \in B_n (\forall n \in \mathbf{N})$，则

$$d(x_n, x_m) \leqslant \operatorname{diam} B_{m\wedge n} \to 0 \quad (m,n \to \infty),$$

可见 $\{x_n\}$ 是 X 中的Cauchy 序列. 由 X 完备有 $x_n \to x$. 由 $\{x_k : k \geqslant n\} \subset B_n$ 及 B_n 为闭集得 $x \in B_n (\forall n \in \mathbf{N})$，因此 $x \in \bigcap B_n$.

(ii)⇒(iii). 设 $\{x_t : t \in T\} \subset X$ 是一Cauchy 网. 取 $t_1 \in T$，使得

$$d(x_t, x_{t_1}) < 1 \quad (\forall t \geqslant t_1);$$

再取 $t_2 \geqslant t_1$，使得

$$d(x_t, x_{t_2}) < 1/2 \quad (\forall t \geqslant t_2);$$

依此继续，得 $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant \cdots$，使得

$$d(x_t, x_{t_n}) < 1/n \quad (\forall t \geqslant t_n, n = 1,2,\cdots). \tag{16}$$

令 $A_n = \{x_t : t \geqslant t_n\} (n \in \mathbf{N})$，则 $\{\overline{A}_n\}$ 是 X 中非空闭集的降列，而由条件(16)显然推出(参考习题38)

$$\operatorname{diam} \overline{A}_n = \operatorname{diam} A_n \to 0 (n \to \infty).$$

于是由(ii)有 $x \in \bigcap \overline{A}_n$. $\forall n \in \mathbf{N}$，由 $x \in \overline{A}_n$ 与式(16)易推出 $d(x, x_{t_n}) \leqslant 1/n$，因而

$$d(x_t, x) \leqslant d(x_t, x_{t_n}) + \frac{1}{n} < \frac{2}{n} \quad (\forall t \geqslant t_n),$$

这推出 $x_t \to x$.

(iii)⇒(i)是平凡的. □

定理4.1.5中对完备性的等价刻画(ii)与(iii)都是很有趣的，值得作一些说明. 首先，你注意到定理4.1.5(ii)是定理3.2.7(ii)的一个类似. 但应注意一个不容忽视的差别：此处要求 $\operatorname{diam} B_n \to 0$. 去掉这一条件，就不能从完备性推出

$\bigcap B_n \neq \varnothing$. 例如取 $X = \mathbf{R}, B_n = [n, \infty)$, 则 $\{B_n\}$ 是非空闭集的降列，而 $\bigcap B_n = \varnothing$. 更精巧的例子是取 $X = m$（有界数列空间），其中度量定义为

$$d(x,y) = \sup_i |x_i - y_i| \quad (x, y \in m).$$

令

$$B_n = \{(0,\cdots,0,x_n,x_{n+1},\cdots) : 1 \leqslant |x_i| \leqslant 2(\forall\, i \geqslant n)\},$$

则 $\{B_n\}$ 是 m 中非空有界闭集的降列，$\operatorname{diam} B_n \not\to 0$，$\bigcap B_n = \varnothing$. 与前一个例子不同的是，在后一例子中 B_n 皆为有界集，而这也不足以保证 $\bigcap B_n \neq \varnothing$. 注意，加进 $\operatorname{diam} B_n \to 0$ 这一条件之后，4.1.5(ii)更接近于经典的区间套定理.

对于 4.1.5(iii)，你或许会提出这样的问题：既然度量拓扑可仅用序列刻画（参考 2.1 节式(32)），何必涉及似不方便的网呢？问题在于，在度量空间的应用中，常不免要用到收敛网，这与度量拓扑的刻画方法无关. 为说明这一点，只要举初等的例子就够了. 例如，在分析中能避免函数极限吗？函数极限就是网的极限！设 $f(x)$ 是定义于 $[a,\infty)$ 上的实函数，为判定当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 收敛，只要检验 Cauchy 条件：

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, A \geqslant a, \forall\, x, y \geqslant A, \text{有 } |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

而这正是对Cauchy 条件(15)的特殊应用. 式(15)可看作最一般形式下的Cauchy 条件，它原则上涵盖了我们在分析课程中曾用过的所有 Cauchy 条件，因而我们实际上已多次应用条件(15)来判定收敛性，只是没有明确意识到罢了. 你不妨考虑一下，如何用条件(15)推出“Riemann 积分和”收敛的充要条件.

现在考虑完备性的某些“不变性”.

4.1.6 命题　(i) 完备性是闭遗传的，即完备度量空间的闭子空间是完备的.

(ii) 设 X 是可数个度量空间 X_i 的积空间，则 X 是完备空间$\Leftrightarrow$每个 X_i 是完备空间. 因此，完备性是可数可乘的.

(iii) 完备性在一致同构映射之下保持不变；或者说，完备性是一致同胚性质.

证　(i) 是明显的.

(ii) 若 X 是完备的，则 X_i 作为 X 的闭子空间（参考习题 110）亦必完备. 反之，设每个 X_i 完备，今证 X 完备. 不妨设 i 遍取自然数. 任取 X 中的Cauchy 序列 $\{x^k\}$. 结合式(13)与式(8b)看出，$\forall\, i \in \mathbf{N}$，$\{x_i^k\}$ 是 X_i 中的Cauchy 序列. 由 X_i 完备，有 $x_i^k \to x_i \in X_i (k \to \infty, i \in \mathbf{N})$，令 $x = (x_i)$，则有 $x^k \to x (k \to \infty)$. 这表明 X 是完备的.

(iii) 设 $F: X \to Y$ 是一致同构，X 是完备空间. 若 $\{Fx_n\}$ 是 Y 中的Cauchy 序列，则由 F^{-1} 一致连续（参看式(1)′）推出 $\{x_n\}$ 是 X 中的Cauchy 序列. 设 $x_n \to x \in X$，则 $Fx_n \to Fx \in Y$，故 Y 是完备的. □

完备空间的开子空间未必是完备的，例如，$\mathbf{R}$ 的子空间(0,1)就显然不是完备的. 完备性在一致连续映射下未必能保持；例如映射(14)是一致连续的，而空间(−1,1)却不是完备的.

对照命题 4.1.6 与定理 3.2.4，你会发现完备性与紧性有某些可对照之处，尽管二者甚至不是同一类的性质(一个是拓扑性质，而另一个是一致拓扑性质). 完备性与紧性都是闭遗传的；紧性是可乘的，而完备性是可数可乘的，当然就证明难易而言二者不可同日而语；紧性在连续映射下保持不变，而完备性则在一致同构下保持不变. 这种对照将有助于对完备性的理解与运用. 后面还将考虑完备性与紧性的其他一些对比.

如同定理3.2.4 是构成紧集的重要依据一样，命题4.1.6 也为构成完备度量空间提供了重要方法. 现在我们可以毫不费力地举出大量完备度量空间的例子.

(i) $\mathbf{R}^\omega$，其中 $\omega = |\mathbf{N}|$；$\mathbf{R}^n (n \in \mathbf{N})$.

(ii) $\mathbf{R}^\omega$ 或 $\mathbf{R}^n$ 的任何闭子空间，例如 $\mathbf{R}_+^\omega$，J^ω，J 是任何闭区间.

(iii) 乘积空间 $J \times \mathbf{R}$，$\mathbf{R}_+^\omega \times J^\omega$ 等.

还注意到一个类似于推论 3.2.3 的结果：度量空间的完备子空间必为闭集. 事实上，若 A 是 X 的完备子空间，$\{x_n\}$ 是 A 中的序列，$x_n \to x \in X$，则 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，因而必在 A 中收敛，这就推出 $x \in A$，即 A 为闭集. 利用以上结论立即推出：度量空间的非闭子空间必不完备；完备空间的子空间是完备的当且仅当它是闭的. 这样，$\mathbf{R}^n$ 的任何开的真子集都不是完备度量空间. 例如，开区间(0,1)就不是完备的.

C. 全有界性与紧性

现在考虑度量空间的第二个重要一致拓扑性质：全有界性. 下面将发现，它与完备性及紧性都有密切联系.

4.1.7 定义　设 $A \subset X$. 若 $\forall\, \varepsilon > 0$，$A$ 可被 X 中有限个半径为 ε 的球覆盖，则称 A 为**全有界集**. 若 X 本身是全有界的，则称 X 为**全有界空间**.

直接从定义看出，全有界集必定是有界的；但其逆则未必为真. 若 $A \subset X$ 全有界，$\varepsilon > 0$，则有有限集 $\{x_i\} \subset X$，使得

$$A \subset \bigcup B_\varepsilon(x_i).$$

如上的 $\{x_i\}$ 称为 A 的一个 **ε-网**(此处的网与定义 2.1.9 所定义的网并无共同之处). 不妨设 $\{x_i\} \subset A$. 否则，取 $a_i \in A \cap B_\varepsilon(x_i)$，则

$$A \subset \bigcup B_{2\varepsilon}(a_i),$$

如 ε 一样，2ε 也是任意的. 因此，A 是全有界集 $\Leftrightarrow$ A 作为 X 的子空间是全有界的. 全有界性亦可描述成：A 全有界 $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$，$A$ 的开覆盖 $\{B_\varepsilon(a) : a \in A\}$ 必含有限子覆盖. 由此看出，全有界性似乎亦是某种"有限覆盖性"，与紧性应有某种联系是很自然的，后面将确切描述这种联系(参看推论4.1.11). 但紧性明显地

强于全有界性. 请注意，上面说的开覆盖 $\{B_\varepsilon(a) : a \in A\}$ 仅用到等半径的球，这就太特殊了.

以下是对于全有界性的一个有点出人意外的等价刻画.

4.1.8 引理　设 $A \subset X$，则 A 全有界 $\Leftrightarrow$ A 中任何序列有一Cauchy 子列(即满足Cauchy 条件的子序列).

证　只需对 $A = X$ 证明. 首先设 X 全有界，任给序列 $\{x_n\} \subset X$，今证 $\{x_n\}$ 有Cauchy 子列. 下面的证明方法实际上是受分析中的逐次等分区间方法启示得出的. 不妨设 x_n 互不相同，设 $B = \{x_n\}$. 因 X 全有界，故有有限个半径为1 的球覆盖 X，其中必有一个，记作 B_1，它含 B 中无限个点；又有有限个半径为1/2 的球覆盖 X，其中必有一个，记作 B_2，使得 $B_1 \cap B_2$ 含 B 中无限个点. 如此继续，得到一系列球 $\{B_n\}$，B_n 的半径为 $1/n$，$A_n \triangleq \bigcap_1^n B_i$ 含 B 中无限个点. 取 $x_{n_1} \in A_1$；取 $n_2 > n_1$，$x_{n_2} \in A_2$；…，如此得到 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k} \in A_k$. 因 $\{x_{n_i} : i \geqslant k\} \subset A_k \subset B_k$，故

$$d(x_{n_i}, x_{n_k}) \leqslant \operatorname{diam} B_k \leqslant 2/k \to 0 \quad (i \geqslant k, k \to \infty).$$

故 $\{x_{n_k}\}$ 是一Cauchy 序列.

反之，若 X 非全有界，则有 $\varepsilon > 0$，X 不被有限个半径为 ε 的球覆盖. 任取 $x_1 \in X$，必有 $x_2 \in X \backslash B_\varepsilon(x_1)$，又有

$$x_3 \in [B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)]^c.$$

如此继续，得到一序列 $\{x_n\} \subset X$. 因当 $m \neq n$ 时 $d(x_m, x_n) \geqslant \varepsilon$，$\{x_n\}$ 必无Cauchy 子列. □

引理4.1.8 给出了全有界性的一个新刻画，不妨称之为Cauchy 子列刻画. 对于全有界性的判定与运用，Cauchy 子列刻画有时是更方便的.

如我们通常所循的思路，下一步是看如何利用已知的全有界集构成新的全有界集.

4.1.9 命题　(i) 全有界性是遗传的，即全有界集的子集是全有界的.

(ii) 全有界性是可数可乘的，即若 X_i 是可数个全有界空间，则其积空间 X 是全有界的.

(iii) 全有界性在一致连续映射下保持不变，即若 X 全有界，$F : X \to Y$ 一致连续，则 FX 在 Y 中全有界.

(iv) 若 $A, B \subset X$ 全有界，则 $A \cup B$ 与 $\overline{A}$ 均全有界.

证　其中(i)是明显的；(iii)与(iv)亦容易用引理4.1.8 所给的Cauchy 子列刻画证明，故只需证(ii). $\forall \varepsilon > 0$，取 n 充分大，使 $2^{-n} < \varepsilon/2$. 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，取有限集 $B_i \subset X_i$，使得

$$X_i = \bigcup_{b_i \in B_i} B_{\varepsilon/2}(b_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{17}$$

$\forall j > n$，取定 $b_j \in X_j$，于是

$$B = \prod_{i=1}^{n} B_i \times \prod_{j>n} \{b_j\}$$

是 X 的有限子集. 任给 $x \in X$，用式(17)得出 $b = (b_i) \in B$，使得 $d_i(x_i, b_i) < \varepsilon/2(1 \leqslant i \leqslant n)$. 于是由式(8a)有

$$d(x,b) \leqslant \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} d_i(x_i, b_i) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即 $x \in B_\varepsilon(b)$，可见 $\{B_\varepsilon(b) : b \in B\}$ 覆盖 X. 故 X 是全有界的. □

利用引理4.1.8与命题4.1.9，现在可举出许多全有界集的例子.

(i) $A \subset \mathbf{R}$ 是全有界的 $\Leftrightarrow A$ 是有界的(用引理4.1.8推出).

(ii) 任给有限区间 $J \subset \mathbf{R}$，J^n 是全有界的，因而其子集是全有界的. 这就推出 $A \subset \mathbf{R}^n$ 全有界 $\Leftrightarrow A$ 有界.

(iii) 任给 $A \subset \mathbf{R}$，A^ω 全有界 $\Leftrightarrow A$ 有界.

(iv) Cauchy 序列(看作子集)是全有界的.

由命题4.1.9(iii)也推出，全有界性是一致拓扑性质. 另一方面，利用同胚映射(14)说明，全有界性不是拓扑性质：在式(14)中，$(-1,1)$是全有界的，而 $\mathbf{R}$ 则不是.

现在转向考虑紧性. 与完备性及全有界性不同，紧性是拓扑性质，但它对于度量空间有非同寻常的意义. 有两点特别值得注意. 其一是多种不同意义的紧性对于度量空间成为一致了. 命题3.2.10已经指明，对于度量空间来说，序列紧、可数紧与聚点紧是一致的. 下面还要指明以上三种紧性与定义3.2.1意义上的紧性也是一致的，这就完全消除了产生歧义的可能. 其二是度量空间的紧性可通过完备性与全有界性这样一些非拓扑性质来刻画(这一点下面就要证明)，而这对于一般拓扑空间是不可能的.

且看下面这个中心结果.

4.1.10 定理 对于度量空间 X，以下条件互相等价：

(i) X 是紧空间；

(ii) X 序列紧，即其中任何序列有收敛子列；

(iii) X 可数紧，即其中非空闭集的降列有非空交；

(iv) X 聚点紧，即其中任何无限子集有聚点；

(v) X 完备且全有界；

(vi) X 全有界，且对 X 的任何开覆盖 $\mathscr{A}$，存在 $\varepsilon > 0$，使得

$$\{B_\varepsilon(x) : x \in X\} \prec \mathscr{A}. \quad \text{(记号依 1.1 节式(26))} \tag{18}$$

最后这个性质以 **Lebesgue 覆盖引理**著称，其中 ε 称为覆盖 $\mathscr{A}$ 的 Lebesgue 数.

证　已经知道(i)⇒(ii)⇔(iii)⇔(iv)(参看命题3.2.9与命题3.2.10).

(ii)⇔(v). 首先设 X 序列紧. 任给序列 $\{x_n\} \subset X$, $\{x_n\}$ 必有收敛子列，因而有Cauchy 子列，这表明 X 全有界(用引理4.1.8). 若 $\{x_n\} \subset X$ 是Cauchy 序列，取 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，设 $x_{n_k} \to x \in X$，则由

$$d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x)$$

与Cauchy 条件(见式(13))推出 $x_n \to x$. 这表明 X 是完备的.

其次设 X 完备且全有界. 任给序列 $\{x_n\} \subset X$, $\{x_n\}$ 必有Cauchy 子列 $\{x_{n_k}\}$(用引理4.1.8)，而由完备性 $\{x_{n_k}\}$ 必收敛，故 X 是序列紧的.

(ii)⇒(vi). 设 X 序列紧，则由已证的(ii)⇔(v)知 X 必全有界. 设对 X 的某个开覆盖 $\mathscr{A}$, $\forall\, \varepsilon > 0$，条件(18)不满足，今由此推出矛盾. $\forall\, n \in \mathbf{N}$，必有 $x_n \in X$，使得

$$B_{1/n}(x_n) \not\subset A \quad (\forall\, A \in \mathscr{A}). \tag{19}$$

取序列 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，设 $x_{n_k} \to x$. 为记号简便，不妨设就是 $x_n \to x$. 取 $A \in \mathscr{A}$，使 $x \in A$. 因 x 是 A 的内点，故有 $r > 0$，使 $B_r(x) \subset A$. 于是由 $x_n \to x$ 及 $1/n \to 0 (n \to \infty)$ 推出，当 n 充分大时有

$$B_{1/n}(x_n) \subset B_r(x) \subset A,$$

这与式(19)相矛盾.

(vi)⇒(i). 设条件(vi)满足，$\mathscr{A}$ 是 X 的任一开覆盖. 取定 $\varepsilon > 0$，使条件(18)满足. 由全有界性，从 X 的开覆盖 $\{B_\varepsilon(x) : x \in X\}$ 中可取出有限子覆盖，然后由式(18)得出 $\mathscr{A}$ 有有限子覆盖. 故 X 是紧空间. □

这样，对于度量空间的紧性刻画，我们就有了由定理4.1.10给出的这一很长的清单. 有许多形式上很不相同的方法可用来判定紧性，这是一件好事，但更有意义的是，将来源与背景都很不相同的许多命题用紧性这一概念统一起来，这足以表明在以度量空间为框架的一般极限论中，紧性起着中心作用. 如果退回到最简单的情况 $X = [a, b]$，则定理4.1.10中的(i)~(v)分别对应着有限覆盖定理、聚点原理、闭集套定理(更特殊地，区间套定理)、Cauchy 收敛原理. 这些基本定理的统一一直是我们关注的目标之一，现在终于得以实现.

在涉及紧性的论证中，定理4.1.10中的诸条件虽然实质上等价，但并非有同样被利用的机会. 如我们曾提到的，“收敛子列条件”(即定理4.1.10(ii))似乎最具优势. 在定理4.1.10的证明中，我们就尽可能地利用了这一优势，这是很值得你仔细体会的. 当然，其他条件都有其适当的应用机会.

利用子空间概念，定理4.1.10自然可用于度量空间中紧集的刻画. 不过，为应用方便起见，不如直接写出以下结论.

4.1.11 推论 设 X 是完备度量空间，$A \subset X$，则以下条件互相等价：

(i) A 是相对紧集；

(ii) A 中任何序列有收敛子列(其极限不必属于 A !)；

(iii) A 是全有界的.

完全平行地可以写出以下条件互相等价：

(i)′ A 是紧集；

(ii)′ A 中任何序列有收敛子列且其极限属于 A；

(iii)′ A 是全有界闭集.

证 (i)⇔(ii). 若 A 相对紧，则 $\overline{A}$ 是紧集，因而 A 中任何序列必有收敛子列. 反之，设 A 中任何序列有收敛子列，而 $\{x_n\} \subset \overline{A}$. $\forall n \in \mathbf{N}$，取 $a_n \in A$，使 $d(a_n, x_n) < 1/n$. 因 $\{a_n\}$ 有收敛子列，故 $\{x_n\}$ 亦必有收敛子列，因此 $\overline{A}$ 为紧集(用定理4.1.10)，从而 A 是相对紧集.

(i)⇔(iii). 若 A 是相对紧集，则 $\overline{A}$ 为紧集，因而是全有界集(用定理4.1.10)，于是 A 为全有界集(用命题4.1.9). 反之，若 A 是全有界集，则 $\overline{A}$ 亦为全有界集(用命题4.1.9). 另一方面，$\overline{A}$ 也是完备的(X 的完备性用于此!)，故 $\overline{A}$ 是紧集(用定理4.1.10)，从而 A 为相对紧集. □

注意，以上证明仅在最后一步用到完备性. 因此，从推论4.1.11中去掉完备性假设后，仍有结论：(i)⇔(ii)⇒(iii). 当初并不很明确的全有界概念，现在可以说很清楚了：在完备空间中，全有界集原来就是相对紧集！若 X 不完备，则 X 中的全有界集不必是相对紧集. 例如，有理点集 $\mathbf{Q}$ 作为 $\mathbf{R}$ 的子空间是不完备的，$\mathbf{Q}$ 的子集 $A = \mathbf{Q} \cap (0,1)$ 作为 $\mathbf{R}$ 的有界子集是全有界集，但 A 在 $\mathbf{Q}$ 中却不是相对紧集，因 A 在 $\mathbf{Q}$ 中的闭包 $= \mathbf{Q} \cap [0,1]$ 不是紧集.

前面我们已经指出，对于 $\mathbf{R}^n$ 中的子集，有界即全有界. 于是从推论4.1.11得出如下最常用到的简单事实.

4.1.12 推论 设 $A \subset \mathbf{R}^n$，则

(i) A 相对紧 $\Leftrightarrow$ A 有界 $\Leftrightarrow$ A 全有界；

(ii) A 是紧集 $\Leftrightarrow$ A 是有界闭集.

最后这个结论在完备度量空间 X 中的推广就是：$A \subset X$ 是紧集 $\Leftrightarrow A$ 是全有界闭集(依推论4.1.11). 这就凸显出一般度量空间中的全有界性，恰相当于 $\mathbf{R}^n$ 中的有界性.

考虑应用紧度量空间的一个典型例子. 我们曾多次提到关于连续函数的基本定理，它们涉及闭区间上连续函数的三个基本性质：有界性、介值性与一致连续性. 关于有界性与介值性的定理都获得了极一般的意义(参看命题3.2.5(ii)与定理3.3.2). 现在是推广第三个定理的时候了. 这件事做起来其实很容易.

4.1.13 定理 设 X 与 Y 是度量空间，X 是紧的，$F \in C(X,Y)$，则 F 必一

致连续.

证　用反证法.设 F 非一致连续,则条件(1)′不成立,即有 $x_n, y_n \in X(n \in \mathbf{N})$,使得

$$d(x_n,y_n) \to 0,\quad d(Fx_n,Fy_n) \not\to 0. \tag{20}$$

于是有 $\varepsilon > 0$, $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, $\{y_n\}$ 的子列 $\{y_{n_k}\}$,使得

$$d(Fx_{n_k},Fy_{n_k}) \geqslant \varepsilon.$$

为记号简便,不妨以 n 代 n_k,于是将式(20)改写成

$$d(x_n,y_n) \to 0,\quad d(Fx_n,Fy_n) \geqslant \varepsilon. \tag{20$'$}$$

用 X 的紧性,取 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$,设 $x_{n_k} \to x$,则亦有 $y_{n_k} \to x$. 于是用连续性与式(20)′得出 $d(Fx,Fx) \geqslant \varepsilon$,得出矛盾.因此 F 必一致连续. □

在以上证明中,我们有意使用了特别值得推荐的"收敛子列论证",方法之简捷,足以使人满意.因为这种证法用得很多,不妨归纳出某种一般模式.设要证某个与紧度量空间有关的命题 P,用反证法:设 P 不成立,而 P 的反面导致 X 中一定序列存在,这些序列存在收敛子列将导致矛盾.要能熟练运用这种论证法,自然有赖于适当的练习.本章末的习题242~249是特别值得推荐的.

D. 第二纲性

下面要考虑的第二纲性本身与度量并无关系,纯粹是一种拓扑性质,但其应用则多半与完备度量空间联系在一起,因而放在此处考虑.

4.1.14 定义　设 X 是一拓扑空间, $A \subset X$. 若 $(\overline{A})^\circ = \varnothing$,则称 A 为**疏集**或**无处稠密集**.疏集的可数并称为**第一纲集**;非第一纲集称为**第二纲集**.若 X 本身是第二纲集,则称 X 为**Baire 空间**.若 X 是Baire 空间且 $A \subset X$ 为第一纲集,则称 A^c 为**剩余集**.

直接从定义可作出如下简单结论.

(i) 闭集成为疏集的充要条件是它没有内点.闭疏集的最著名例子是Cantor集 $P = [0,1] \backslash G$,其中

$$G = \bigcup \left\{ \left(\frac{3k-2}{3^n}, \frac{3k-1}{3^n} \right) : k = 1,2,\cdots,3^{n-1}, n = 1,2,\cdots \right\}.$$

疏集不可能有内点,但无内点的集未必是疏集,除非它是闭集.例如, $\mathbf{R}$ 中的有理点集就不是疏集.

(ii) $\mathbf{R}$ 中的单点集是疏集,因而 $\mathbf{R}$ 的任何可数子集(如有理点集)是第一纲集.第一纲集的子集与第一纲集的可数并均为第一纲集.

(iii) 若 $A = \bigcup A_n$ 是第二纲集,则必有某个 A_n 不是疏集;若 A_n 均为闭集,则必有某个 A_n 含内点.

第一纲集是否有内点,无理数集是否为第二纲集,这样一些问题并不易直接从定义 4.1.14 得到回答.这些问题的解答依赖于以下基本定理,它的某种最初

形式由 Baire 于1899 年证明.

4.1.15 Baire 定理　设 X 是完备度量空间或LCH,则 X 是Baire 空间,其中的第一纲集无内点,而剩余集是第二纲集与稠集.

完备度量空间类与LCH 类是互不包含的①,因此定理关于这两类空间的结论都有独立价值.不过,下面的证明只对完备度量空间进行,对LCH 证明应作的改动是比较明显的.

证　表面上,定理包含三个结论:

(i) X 是第二纲集;

(ii) 若 $A \subset X$ 是第一纲集,则 $A^\circ = \varnothing$;

(iii) 若 $A \subset X$ 是剩余集,则 A 是第二纲集且 $\overline{A} = X$.

若假定结论(ii)已获证,则 X 必为第二纲集(否则 $X^\circ = \varnothing$!),且当 A^c 为第一纲集时 A 必非第一纲集(否则 $X = A \cup A^c$ 是第一纲集!), $A^{c\circ} = \varnothing$, 因而 $\overline{A} = X$. 可见只需证结论(ii).

设 $A = \bigcup A_n$, A_n 是疏集,今证 $A^\circ = \varnothing$. 反设 $A^\circ \neq \varnothing$, 下面导出矛盾. 由 A_n 为疏集推出

$$X = (\overline{A}_n)^{\circ c} = \overline{A_n^{c\circ}},\quad (\text{用 2.1 节式(14)})$$

可见 $A_n^{c\circ}$ 是稠开集 ($\forall\, n \in \mathbf{N}$). 因 $A^\circ \cap A_1^{c\circ}$ 是非空开集(用命题2.4.11),它必包含一个半径<1 的闭球 $\overline{B}_1$; 同理, $B_1 \cap A_2^{c\circ}$ 必包含一个半径<1/2 的闭球 $\overline{B}_2, \cdots$, 一般地, $B_{n-1} \cap A_n^{c\circ}$ 必包含一个半径 $< 1/n$ 的闭球 $\overline{B}_n, n = 1,2,\cdots$, 约定 $B_0 = A^\circ$. 因 $\operatorname{diam}\overline{B}_n \to 0$, 于是由定理4.1.5 有 $x \in \bigcap \overline{B}_n$. 显然

$$x \in \overline{B}_1 \subset A^\circ \cap A_1^{c\circ} \subset A.$$

但另一方面有

$$x \in \overline{B}_n \subset B_{n-1} \cap A_n^{c\circ} \subset A_n^c,\quad (\forall\, n \in \mathbf{N})$$

因而 $x \in \bigcap A_n^c = A^c$, 得出矛盾. □

由定理4.1.15 立即得出:若 X 是完备度量空间或LCH,则其中含内点的集均为第二纲集.例如, $\mathbf{R}^n$ 中的任何开球都是第二纲集.这就表明第二纲集普遍地存在.无理点集在 $\mathbf{R}$ 中是剩余集,因而必为第二纲集.这个例子表明第二纲集不必有内点.

Baire 定理的意义在于揭示了完备度量空间(或LCH)中的第一纲集与剩余集的极端对立②.若 X 是完备度量空间(或LCH),则无论怎样从 X 中挖去第一纲集,即使相继挖去无限可数多次, X 中剩余的部分仍然是第二纲集且在 X 中

① 如Hilbert 空间 l^2 是完备度量空间而非LCH;实区间(0,1)是LCH 而非完备度量空间.

② 第一纲集与第二纲集固然有本质差别,但一般并不呈现出第一纲集与剩余集之间那种对立关系.

稠密. 这就表明，在某种意义上，就在 X 中的"浓度"而言，第一纲集与其剩余集处于两个极端：第一纲集是空间中的"几乎可忽略部分"，而剩余集则占据了空间的"几乎全部"，因而表现出某种不可穷竭性. 直观上，X 中的第一纲集与其剩余集的关系恰如 $\mathbf{R}$ 中有理点集与无理点集的关系. 这种初步理解有助于你认识 Baire 定理的意义.

Baire 定理为抽象地刻画"稀有性"与"一般性"提供了一种拓扑方法. 一般的模式是：如果状态变元 x 的变域是某个完备度量空间（或LCH）X，某种状态对应于 X 的子集 A，则当 A 是第一纲集或剩余集时，分别认为该状态是"几乎不出现"或"几乎必然出现"的①. 这一方法在现代数学中导致异常深刻的结果实在是一件可庆幸的事. 可惜，由于背景知识的缺乏，本书并不能提供多少例子. 但如下的简单例子也足以说明问题.

4.1.16 例　设 $J=[0,1]$. 对 $\mathbf{R}^n$ 中任一连续曲线 $x: J\to\mathbf{R}^n$，其长度 l 定义为

$$l=\sup\sum_{i=1}^{n}|\Delta x(t_i)|,$$

其中 $\Delta x(t_i)=x(t_i)-x(t_{i-1})$，sup 是对 J 的所有分划

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1 \tag{21}$$

取的. 利用显然的不等式

$$\max_i|x_i|\leqslant|x|\leqslant\sum_i|x_i|\quad(x=(x_i)\in\mathbf{R}^n),$$

容易看出

$$\max_i\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(x_i)\leqslant l\leqslant\sum_i\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(x_i),$$

其中 $x=x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$，$\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(x_i)$ 记函数 $x_i(t)$ 在区间[0,1]上的全变差. 因此，

$$l<\infty\Leftrightarrow\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(x_i)<\infty\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

现在取 $X=C(J)$，X 依度量

$$d(x,y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|\quad(x,y\in X)$$

是一完备度量空间. 令

$$A=\{x\in X:\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(x)<\infty\},$$

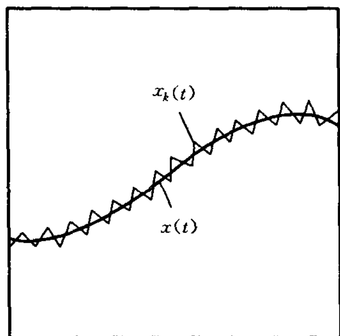
今证 A 是第一纲集. 显然 $A=\bigcup_1^\infty A_n$，其中

$$A_n=\{x\in X:\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(x)\leqslant n\}\quad(n\in\mathbf{N}).$$

① 这些说法仅具有比拟的意义，它们并不具有比 Baire 定理所表述的更多的涵义.

只要证 A_n 是闭疏集. 固定 $n \in \mathbf{N}$, 设 $\{x_k\} \subset A_n$, 在 X 中 $x_k \to x(k \to \infty)$, 则

$$\sum |\Delta x_k(t_i)| \leqslant n \quad (\{t_i\} \text{ 如式}(21));$$



$J=[0,1]$

图 4-1

令 $k \to \infty$ 得 $\sum |\Delta x(t_i)| \leqslant n$, 从而 $\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(x) \leqslant n$, $x \in A_n$. 故 A_n 是闭集. 其次证 $A^\circ_n = \varnothing$, 即 $\overline{A_n^c} = X$. 这相当于指明 J 上每个连续函数可用全变差 $> n$ 的连续函数一致逼近. 这在直观上是显然的: 每个连续函数 $x(t)$ 总可用如图4-1 所示的锯齿形函数 $x_k(t)(k \geqslant 1)$ 一致逼近. 更详细的步骤不必具体写出.

这就得出结论: X 中的有界变差函数是极其"稀少"的. 或者说,几乎所有连续函数具有无限大的全变差. 由本例开头的讨论,进而又推出颇令人惊讶的以下结论:在 $\mathbf{R}^n$ 中,几乎所有连续曲线(即使限于有界区域内)都是无限长的!

如不用Baire 定理,你能想象可用常规方法达到以上结论吗?

E. 度量化定理

本节的内容已充分显示出,相对于一般拓扑空间而言,度量空间具有明显的优势. 这就自然提出一个问题:如何判定一个拓扑是度量拓扑? 这一问题已彻底解决,但完全的解答依赖于较复杂的方法,难以在此作详细介绍. 但若限于考虑可分空间,则问题的解决要容易得多. 下面就来处理这种简单情况. 首先给出一些必要的定义.

4.1.17 定义 设 (X,τ) 是一拓扑空间. 若 X 上可定义一个度量 d, 使 τ 恰为 d 生成的度量拓扑(或说 d 是 τ 的一个**相容度量**). 则称 τ 为**可度量化拓扑**,而称 X 为可度量化拓扑空间,简称为**可度量化空间**.

一旦已断定某个拓扑空间 X 是可度量化的,就可将有关度量拓扑的所有结论应用于空间 X. 例如,我们能断定: X 可分$\Leftrightarrow$ X 是第二可数的; X 是紧的 $\Leftrightarrow X$ 是序列紧的,等等. 在这样做时,并不必实际联系于某一特定度量. 只是在必要时才依方便选择某个适当的相容度量来处理 X 中的拓扑问题,而不论拓扑 τ 的最初来源是否联系于该度量. 可度量化概念的好处主要在此.

可度量化概念的表述中虽然涉及度量,但它是一个拓扑概念,原则上可从纯粹的拓扑考虑作出判断,而不依赖于特定度量的选择. 对于可度量化拓扑的运用来说,关键的事情是确立相容度量的存在性. 至于是否要实际构造出某个相容度量,则取决于问题的具体需要,未必总是重要的.

关键的问题是可度量化的判定. 否定判断通常要容易些:指出所考虑的拓扑

不具有度量拓扑的某一个(随便哪一个)性质就够了. 例如,我们已经知道,度量空间是第一可数的;可分性等价于第二可数性;是正规空间;紧性等价于序列紧性等. 不具备这些性质中任何一条的拓扑,都可立即排除在可度量化拓扑之外. 例如,在 2.4C 中(参看例 2.4.8),通过指出 $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ 不是第一可数空间得出其中的拓扑不能由某个度量生成,正是以上方法的应用. 至于肯定判断,一方面可利用如下简单事实:"可度量化性"是遗传的与可数可乘的(参看本节A 段). 另一方面则可借助于一定度量化定理. 下面就是一个较简单的度量化定理.

4.1.18 定理(Urysohn,1924)　对于拓扑空间 X,以下条件互相等价:

(i) X 是可分的可度量化空间;

(ii) X 是第二可数的正则空间;

(iii) X 可拓扑嵌入 $J^\omega, J = [0,1], \omega = |\mathbf{N}|$.

证　(i)⇒(ii)是平凡的(参考命题 2.4.12).

(ii)⇒(iii). 设 X 是第二可数的正则空间. 由定理 3.1.18, X 是正规空间,从而是全正则空间,于是由定理 3.1.14 知 X 可拓扑嵌入 J^ω.

(iii)⇒(i). J 显然是可分度量空间,因而 J^ω 的任何子空间都是可分度量空间. □

你注意到,看来颇为深刻的度量化定理,其证明竟出人意外地简单,这当然是利用了定理 3.1.14 与定理 3.1.18 等强有力定理的结果. 直接由定理 4.1.18 推出, J^ω 是可分可度量化空间的万有空间(参考 3.1C). 这一断语最清楚地表达了可分可度量化空间类的全貌. 可以说,关于可分可度量化空间的全部信息已完全蕴藏于空间 J^ω 之中了. 空间 J^ω 有相对简单且明晰的构成,无疑更便于处理与运用.

在这一点上,对于度量空间的可分性自然增加了一些新的兴趣. 让我们给出下面这个简单而常用的结果.

4.1.19 命题　全有界度量空间是可分的. 因此,度量空间的全有界子集与相对紧子集是可分的.

证　设 X 是全有界度量空间. $\forall n \in \mathbf{N}$, 取有限集 $A_n \subset X$, 使得

$$X = \bigcup_{a \in A_n} B_{1/n}(a). \quad (n \in \mathbf{N})$$

令 $A = \bigcup A_n$, 则 A 是可数集,今证 $\overline{A} = X$. 为此,只要对任给 $x \in X, r > 0$, 证 $A \cap B_r(x) \neq \varnothing$ (用命题2.4.11). 取定 $x \in X$ 与 $r > 0$. 取 $n \in \mathbf{N}$, 使 $1/n < r$; 取 $a \in A_n$, 使 $x \in B_{1/n}(a)$; 则

$$a \in B_{1/n}(x) \subset B_r(x),$$

故得 $A \cap B_r(x) \neq \varnothing$. □

结合定理4.1.18 与命题4.1.19 有以下推论.

4.1.20 推论　(i) X 是紧的可度量化空间 $\Leftrightarrow X$ 是第二可数的紧 T_2 空间 $\Leftrightarrow X$ 可作为闭子空间拓扑嵌入 J^ω.

(ii) X 是可分的可度量化空间 $\Leftrightarrow X$ 同胚于某个紧度量空间的一个稠密子空间.

证　(i) 是明显的.

(ii) 设 X 是可分可度量化空间，则 X 可拓扑嵌入 J^ω (用定理 4.1.18)，设 $X \cong A \subset J^\omega$. 因 J^ω 是紧度量空间，故其闭子空间 $\overline{A}$ 亦是紧度量空间，A 显然在 $\overline{A}$ 中稠密. 逆命题直接由命题 4.1.19 推出. □

4.2 一致空间

在上节中，我们将在一致同构映射下保持不变的性质界定为一致拓扑性质，并将其与拓扑性质相对照. 但如果你仔细琢磨一下，就会发现这一对照有一令人困惑不解的缺陷：保持拓扑性质不变的同胚，实现拓扑结构的完全对应，而拓扑结构可确切地界定为服从开集公理的开集族. 与此相对照，由一致同构所实现互相对应的空间结构又是什么呢？我们知道，由一致同构所传递的空间结构既不是拓扑也不是度量(二者分别与同胚、等距同构相联系)，应当是介于拓扑与度量之间的某种"一致结构". 那么一致结构的载体又是什么呢？这些问题将在本节获得解决，其结果是一致空间这一优美和谐的抽象系统，它一方面继承了拓扑空间的一般特点，同时又包容了度量空间的某些基本结果.

A. 一致结构

在 2.1B 中我们曾提到，拓扑结构完全决定于空间中诸点的邻域系. 邻域系无非用于刻画"动点"对"定点"的接近程度，这种接近乃是极限与连续性的基础. 而一致连续所依赖的则是一对"动点"的互相无限接近，这就需要有一种刻画两点相互接近的方法，这种方法应当不依赖于特定的度量，而是完全"集论性"的. 约定以 Δ 记 $X \times X$ 中的对角线(依1.1 节式(21))，则 $x, y \in X$ 的接近程度可描述为点 (x,y) 对 Δ 的接近程度，仅当 $(x,y) \in \Delta$ 时 $x = y$. 这就启示出，应当以包含 Δ 的某个类似于邻域系的集族来刻画两点之间的相互接近. 有了这些考虑之后，你对于以下定义就不那么感到惊奇了.

4.2.1 定义　设 X 是一非空集. 若给定了一个集族 $\mathscr{U} \subset 2^{X \times X}$，它满足如下公理：

(U_1) $\mathscr{U}$ 是 $X \times X$ 上的一个滤子(依定义 1.1.10)；

(U_2) $U \in \mathscr{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathscr{U}$ (记号依 1.1 节式(17))；

(U_3) $\forall U \in \mathscr{U}, \exists V \in \mathscr{U}: V \circ V \subset U$ (记号依 1.1 节式(19))；

(U_4) $\Delta = \bigcap \mathscr{U}$，$\Delta = \Delta_X$ 是对角线，

则称 X 或 $(X,\mathscr{U})$ 为**一致空间**①，称 $\mathscr{U}$ 为 X 上的一个**一致结构**，$\mathscr{U}$ 的滤基(或子滤基)称为一致结构 $\mathscr{U}$ 的**基**(**或子基**).

对如上定义的 $\mathscr{U}$，不妨给它一个有点粗略但稍带直观的解释. 任给 $U \in \mathscr{U}$，当 $(x,y) \in U$ 时认定点 x 与 y 是"U 阶接近"的；U 愈小，接近度就愈高. 由公理 (U_1) 推出，$U,V \in \mathscr{U} \Rightarrow U \cap V \in \mathscr{U}$，这就表明存在愈来愈高的接近度. (U_2) 表达某种对称性：若 x 与 y 为 U 阶接近，则 y 与 x 为 U^{-1} 阶接近. (U_3) 表达了接近的某种传递性：给定 $U \in \mathscr{U}$，只要 x 与 y，y 与 z 充分接近，就能使 x 与 z 为 U 阶接近. (U_4) 意味着，$x = y \Leftrightarrow x$ 与 y 相互可任意接近. 公理 (U_4) 可减弱为：$\Delta \subset \bigcap \mathscr{U}$，但这样一来，就不能保证 $\mathscr{U}$ 生成的拓扑具 T_2 分离性(参看下面的定理 4.2.3). 因此我们宁可用 (U_4) 这一较强的限制，而且从实际应用来看，这并不很失一般性.

为便于应用，直接表述一致结构的基与子基如下：设 $\mathscr{B} \subset \mathscr{U}$，则 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的基 $\Leftrightarrow \forall\, U \in \mathscr{U}, \exists\, B \in \mathscr{B} : B \subset U$；$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{U}$ 的子基 $\Leftrightarrow \forall\, U \in \mathscr{U}, \exists\, \{B_1, B_2, \cdots, B_n\} \subset \mathscr{B} : \bigcap B_i \subset U$. 注意由公理 (U_1)、(U_2) 推出，当 $U \in \mathscr{U}$ 时，$V = U \cap U^{-1} \in \mathscr{U}$，且 $V = V^{-1} \subset U$，因此 $\{V \in \mathscr{U} : V = V^{-1}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个基，称为对称基. 类似地，由公理 (U_3) 推出，$\{V \circ V : V \in \mathscr{U}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个基；进而可推出，对任何 $k \geqslant 1$，

$$\{\overbrace{V \circ V \circ \cdots \circ V}^{k\text{个}} : V \in \mathscr{U}\}$$

是 $\mathscr{U}$ 的一个基. 如同对于拓扑问题可用邻域基来代替邻域系一样，对于一致空间的种种问题，一致结构的基起着同样的作用. 直观地说，$\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的基意味着 $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ 且 $\mathscr{U}$ 中存在"任意小"的属于 $\mathscr{V}$ 的集. 在 $\mathscr{U}$ 中存在"任意小"的对称集与形如 $V \circ V$ 的集，这一简单事实是要经常用到的.

鉴于基概念的重要性，我们需要一个类似于命题 1.1.11 或命题 2.1.5 的结果，这就是下面的

4.2.2 命题　设 $(X,\mathscr{U})$ 是一个一致空间，$\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的基，则 $\mathscr{V}$ 满足如下条件：

(i) $\forall\, A, B \in \mathscr{V}$，有 $\mathscr{V} \vdash A \cap B$ (记号依 1.1 节式(26))；

(ii) $\forall\, B \in \mathscr{V}$，有 $\mathscr{V} \vdash B^{-1}$；

(iii) $\forall\, B \in \mathscr{V}, \exists\, A \in \mathscr{V}$，使 $A \circ A \subset B$；

(iv) $\Delta = \bigcap \mathscr{V}$.

反之，若给定 $\mathscr{V} \subset 2^{X \times X}$，$\mathscr{V}$ 满足条件(ii)～(iv)，则存在 X 上的唯一一致结

---

① 一致空间是由 A. Weil 于 1937 年引入的，对它的研究最初受到拓扑群理论的推动.

构$\mathscr{U}$,$\mathscr{U}$以$\mathscr{V}$为其子基,且$\mathscr{U}$是X上包含$\mathscr{V}$的最小一致结构,称为由$\mathscr{V}$生成的一致结构.当$\mathscr{V}$还满足条件(i)时,$\mathscr{V}$是$\mathscr{U}$的基.

参照命题1.1.11,以上命题的证明是容易的,你不难自己作出.

命题4.2.2的主要作用是用来构成一致结构.现在就来考虑一个简单例子,它无疑是我们首先关心的.设(X,d)是一个度量空间.约定(参看图4-2)

$$\begin{cases}\mathscr{V}=\{V_r:r>0\},\\ V_r=\{(x,y)\in X\times X:d(x,y)<r\},\end{cases}\tag{1}$$

则利用度量的性质容易直接验证:

$$\begin{cases}V_r\cap V_s=V_{r\wedge s},\quad V_r=V_r^{-1},\\ V_r\circ V_r\subset V_{2r},\quad \Delta=\bigcap\limits_{r>0}V_r.\end{cases}\tag{2}$$

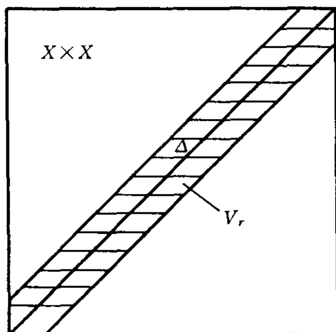


图4-2

由式(2)直接看出,由式(1)定义的$\mathscr{V}$满足命题4.2.2中的条件(i)~(iv),因此以$\mathscr{V}$为基在X上生成一个一致结构$\mathscr{U}$,称它为由度量d生成的一致结构.今后将度量空间看作一致空间时,总认定其中采用由度量生成的一致结构.

让我们观察得更仔细一点.式(2)中的四个关系式恰好依次推出命题4.2.2中的条件(i)~(iv);而4.2.2中的条件(i)~(iv)又依次推出$\mathscr{U}$满足公理(U_1)~(U_4)(依定义4.2.1),$\mathscr{U}$是由$\mathscr{V}$生成的一致结构;还注意到式(2)的后三个关系式依次基于度量的对称性、三角不等式与正定性.这就得出结论:一致结构所要满足的公理(U_2)~(U_4),可依次看作是距离公理(D_1)~(D_3)(依定义2.1.14)的某种推广.特别,公理(U_3)表达了抽象形式下的三角不等式.在这种理解下,一致结构就呈现出多少类似于度量空间的某种直观形象.

当然,由度量d生成一致结构具有特别简单的形式.利用基或子基生成一致结构的更复杂的例子,将在后面陆续看到.

在建立度量空间与一致空间的联系之后,自然会提出的下一个问题是,一致空间与拓扑空间是否有某种联系?现在就来考虑这一问题.设$\mathscr{U}$依定义4.2.1,$U\in\mathscr{U}$.直观上很明显,若$(x,y)\in U$描述了x与y之间的某种程度的相互接近,那么$y\in U(x)$($\Leftrightarrow (x,y)\in U$,记号依1.1节式(18))就表达了“$y$在$x$的某个邻近”,或者说,$U(x)$应作为$x$的一个邻域.这一想法成为由一致结构定义拓扑的基础.准确的结论如下.

4.2.3 定理　设$(X,\mathscr{U})$是一个一致空间,则有以下结论:

(i) X上存在唯一拓扑τ,使得依此拓扑有

$$\mathscr{N}_x=\{U(x):U\in\mathscr{U}\}\quad(x\in X),\tag{3}$$

$\mathscr{N}_x$ 表示 x 的邻域系(依2.1节式(6)),且 (X,τ) 是 T_2 空间.

(ii) 若 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的基(或子基),则依(i)所述的拓扑 τ,

$$\mathscr{V}_x = \{V(x) : V \in \mathscr{V}\} \quad (x \in X) \tag{4}$$

是 x 的邻域基(或邻域子基).

证 (i) $\forall\, x \in X$,以 $\mathscr{U}_x$ 记式(3)之右端. 由 $\Delta = \bigcap \mathscr{U}$ 推出 $x \in \bigcap \mathscr{U}_x$. 若 $U,V \in \mathscr{U}$,则 $W \triangleq U \cap V \in \mathscr{U}$,从而

$$W(x) \subset U(x) \cap V(x).$$

可见 $\mathscr{U}_x$ 满足定理2.1.8中的条件(i)和(ii). 任给 $U \in \mathscr{U}$,取 $V \in \mathscr{U}$,使 $V \circ V \subset U$,则 $\forall\, y \in V(x)$,有

$$V(y) \subset V(V(x)) = (V \circ V)(x) \subset U(x),$$

可见 $\mathscr{U}_y \vdash U(x)$. 这表明 $\{\mathscr{U}_x\}$ 满足定理2.1.8中条件(iii). 于是依定理2.1.8知 X 上存在唯一拓扑 τ,依此拓扑,使得每个 $\mathscr{U}_x$ 正好是 x 的邻域基,因而 $\mathscr{U}_x \subset \mathscr{N}_x$. 若 $U(x) \subset A \subset X, U \in \mathscr{U}$,令 $V = U \cup (\{x\} \times A)$,则 $V \in \mathscr{U}, A = V(x) \in \mathscr{U}_x$. 这就证得等式(3)成立.

若 $x,y \in X, x \neq y$,则存在 $U \in \mathscr{U}$,使 $(x,y) \,\overline{\in}\, U$ (用定义4.2.1中的公理(U_4)). 取 $V \in \mathscr{U}$,使 $V \circ V \subset U$,不妨设 $V = V^{-1}$,则 $(x,y) \,\overline{\in}\, V \circ V$,这推出 $V(x) \cap V(y) = \varnothing$,可见 x 与 y 可邻域分离. 故 (X,τ) 是 T_2 空间.

(ii)是明显的. □

由定理4.2.3所确立的拓扑 τ 称为由 $\mathscr{U}$ 生成的**一致拓扑**. 当将一致空间看作拓扑空间时,总认定其中使用一致拓扑. 若 (X,d) 是度量空间,V_r 依式(1),则 $V_r(x) = B_r(x)(x \in X)$. 这就表明,X 上的一致拓扑正是由 d 生成的度量拓扑(参看2.1D). 这样,度量空间上的三种结构:度量结构、一致结构与拓扑结构,已被说明是彼此相容的. 对一般的一致空间 $(X,\mathscr{U}), x \in X, U \in \mathscr{U}$,可以认为 x 的邻域 $U(x)$ 起着度量空间中的球形邻域 $V_r(x)$ 的作用.

本节要探讨的主要问题之一是,一致空间上的一致拓扑有哪些特殊性质?一些重要性质将在后面考虑,此处首先给出带预备性质的以下结果.

4.2.4 命题 对于一致空间 $(X,\mathscr{U})$,以下结论成立:

(i) 设 $A \subset X, M \subset X \times X, \mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的基,则

$$\overline{A} = \bigcap \{V(A) : V \in \mathscr{V}\}, \tag{5}$$

$$\overline{M} = \bigcap \{V \circ M \circ V : V \in \mathscr{V}\}. \tag{6}$$

(ii) $\mathscr{U} \subset \mathscr{N}_\Delta$(记号依3.1节式(1));$\mathscr{U}$ 中的开集(或闭对称集)构成 $\mathscr{U}$ 的基.

证 (i) 不妨设 $\mathscr{V} = \mathscr{U}$. 以 B 记式(5)之右端. $\forall\, x \in \overline{A}, U \in \mathscr{U}$,取 $V = V^{-1} \in \mathscr{U}$,使 $V \subset U$,则有 $A \cap V(x) \neq \varnothing$(用式(3)与2.1节式(11)),这推出 $x \in V(A) \subset U(A)$. 因此 $\overline{A} \subset B$. 反之,若 $x \in B$,则对任何对称的 $V \in \mathscr{U}$ 有

$x \in V(A)$，这推出 $A \cap V(x) \neq \varnothing$. 因

$$\{V(x) : V = V^{-1} \in \mathscr{U}\}$$

是 x 的邻域基(用定理4.2.3(ii))，故 $x \in \overline{A}$. 因此 $\overline{A} = B$. 类似地，若 $V = V^{-1} \in \mathscr{U}$，则

$$(x,y) \in V \circ M \circ V \Leftrightarrow [V(x) \times V(y)] \cap M \neq \varnothing,$$

由这一事实易推出等式(6).

(ii) 任给 $U \in \mathscr{U}$，取对称的 $V \in \mathscr{U}$，使得 $V \circ V \circ V \subset U$. 任给 $(x,y) \in V$，有

$$V(x) \times V(y) \subset V \circ V \circ V \subset U, \tag{7}$$

可见 $(x,y) \in U^{\circ}$，从而 $V \subset U^{\circ}$，故 $U^{\circ} \in \mathscr{U}$. 这又推出 $\Delta \subset U^{\circ}$，因此 $U \in \mathscr{N}_{\Delta}$. $\{U^{\circ} : U \in \mathscr{U}\}$ 就是 $\mathscr{U}$ 的由开集构成的基. 对式(7)中的 V 有 $\overline{V} \subset V \circ V \circ V \subset U$ (用式(6))，所有这样的 $\overline{V}$ 构成 $\mathscr{U}$ 的一个基，而每个 $\overline{V}$ 为闭对称集. □

现在转向考虑一致连续映射，它在一致空间理论中的作用，犹如连续映射在拓扑空间理论中的作用. 若 X, Y 是度量空间，$F : X \to Y$，则由4.1节式(1)所表达的一致连续条件可缩写为

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (F \times F)V_{\delta} \subset V_{\varepsilon}, \tag{8}$$

其中 $F \times F$ 依2.3节式(8)′，V_r 依式(1). 这启示出以下定义.

4.2.5 定义　设 $(X,\mathscr{U})$ 与 $(Y,\mathscr{V})$ 是两个一致空间，$F : X \to Y$. 若 $(F \times F)\mathscr{U} \vdash \mathscr{V}$，即

$$\forall V \in \mathscr{V}, \exists U \in \mathscr{U} : (F \times F)U \subset V, \tag{9}$$

则说 F **一致连续**. 若 F 是双射且 F 与 F^{-1} 均一致连续，则称 F 为从 X 到 Y 的**一致同构**；当这样一个一致同构存在时，说 X 与 Y 是一致同构(或一致等价)的一致空间.

注意，与连续映射不同，一致连续映射是一个整体概念，“在一点一致连续”这种说法是没有意义的.

以下结果可与定理2.2.3相对照.

4.2.6 命题　设 $(X,\mathscr{U})$ 与 $(Y,\mathscr{V})$ 是两个一致空间，$F : X \to Y$，则以下条件互相等价：

(i) F 一致连续；

(ii) 对 $\mathscr{V}$ 的任何(或某个)子基 $\mathscr{B}$，有 $(F \times F)\mathscr{U} \vdash \mathscr{B}$；

(iii) 对 $\mathscr{V}$ 的任何(或某个)子基 $\mathscr{B}$，有 $(F \times F)^{-1}\mathscr{B} \subset \mathscr{U}$；

(iv) 对 $\mathscr{V}$ 的任何(或某个)子基 $\mathscr{B}$ 及 $X \times X$ 中的网 $\{(x_t, y_t)\}$，若 (x_t, y_t) 最终在每个 $U \in \mathscr{U}$ 中，即

$$\forall U \in \mathscr{U}, \exists t_0, \forall t \geqslant t_0, 有 (x_t, y_t) \in U, \tag{10}$$

则 (Fx_t, Fy_t) 最终在每个 $V \in \mathscr{B}$ 中.

证 (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)是明显的.

(iv)⇒(i). 设 F 非一致连续,则存在 $V \in \mathscr{V}$,使得 $\forall U \in \mathscr{U}$,有 $(F \times F)U \not\subset V$,即有 $(x_U, y_U) \in U$,使得 $(Fx_U, Fy_U) \overline{\in} V$. $\mathscr{U}$ 依 $\supset$ 是一有向集,因此 $\{(x_U, y_U)\}$ 是 $X \times X$ 中的一个网. 取 $V_i \in \mathscr{B}(1 \leqslant i \leqslant n)$,使 $\bigcap V_i \subset V$,必有 $\{(Fx_U, Fy_U)\}$ 的某个子网不在某个 V_i 中. 另一方面,(x_U, y_U) 显然最终在每个 $W \in \mathscr{U}$ 中,这就说明条件(iv)必不满足. □

注意,命题4.2.6中条件(ii)~(iv)可分别类比于命题2.2.2(iii),定理2.2.3(iii)与命题2.2.2(iv). 命题4.2.6(iv)也可以看作是4.1节中条件(1)′的推广;直观上,条件(10)正表示 (x_t, y_t) 趋向于无限接近,只是此处不像度量空间中一样,能用 $d(x_t, y_t) \to 0$ 来表示 x_t 与 y_t 无限接近. 若在(iv)中令 $y_t = x$,则(iv)可表为:若 x_t 最终在每个 $U(x)(U \in \mathscr{U})$ 中,则 Fx_t 最终在每个 $V(Fx)(V \in \mathscr{B})$ 中,这正意味着

$$x_t \to x \Rightarrow Fx_t \to Fx.$$

这就表明,一致连续 ⇒ 连续,因而一致同构 ⇒ 同胚.

若 $F: X \to Y$ 是一致同构,则由命题4.2.6推出

$$(F \times F)\mathscr{U} = \mathscr{V}.$$

在这种情况下,可以认为,X 与 Y 实质上具有同样的一致结构,它们所不同的仅是外表形式而已. 因此,互相一致同构的一致空间不必区别. 凡在一致同构之下保持不变的性质称为**一致拓扑性质**,或一致不变量;互相一致同构的一致空间,必具有相同的一致拓扑性质,当然也有相同的拓扑性质. 一致空间理论所研究的就是一致空间的一致拓扑性质,其中也包括拓扑性质. 这一基本观点是学习一致空间时不可不知的.

拓扑空间与度量空间都考虑了子空间与积空间概念. 对于一致空间亦有类似的概念. 因有关的构造与结论与拓扑空间的相应概念非常类似,此处仅写出结论而略去平凡的证明.

4.2.7 命题 (i) 设 $(X, \mathscr{U})$ 是一个一致空间,$\varnothing \neq A \subset X$,则

$$\mathscr{U}_A \triangleq \{(A \times A) \cap U : U \in \mathscr{U}\} \tag{11}$$

是 A 上的一致结构,它生成的一致拓扑恰为相对拓扑.

(ii) 设 $(X_i, \mathscr{U}_i)(i \in I)$ 是一族一致空间,$X = \prod X_i$,$P_i: X \to X_i$ 是投影. 则以

$$\mathscr{V} = \bigcup (P_i \times P_i)^{-1}\mathscr{U}_i \tag{12}$$

为子基在 X 上生成一个一致结构 $\mathscr{U}$,它是 X 上使每个 P_i 均一致连续的最小一致结构;$\mathscr{U}$ 生成的一致拓扑恰为积拓扑. 若在式(12)中 $\mathscr{U}_i$ 代以某个子基 $\mathscr{V}_i(i \in I)$,则所得的 $\mathscr{V}$ 仍是 $\mathscr{U}$ 的子基.

命题4.2.7(i)中的 $\mathscr{U}_A$ 称为 $\mathscr{U}$ 在 A 中的**相对一致结构**,$(A, \mathscr{U}_A)$ 称为 $(X,$

$\mathscr{U}$）的一致子空间. 当将 A 看作一致空间时，其中总使用相对一致结构. 命题4.2.7(ii)中的 $\mathscr{U}$ 称为**积一致结构**.（X,$\mathscr{U}$）称为**积一致空间**. 当将 X 看作一致空间时，总认定其中使用积一致结构. 所有这些规定，与处理拓扑子空间及积拓扑空间的作法是类似的.

B. 伪度量族

以上我们用一特定的集族 $\mathscr{U}$ 成功地刻画了一致拓扑、一致连续、一致同构等概念，而在4.1节中，这些概念本来是通过度量来定义的. 这就表明，一致拓扑性质实际上并不依赖于度量，而且也可以用完全避开度量的方法来研究. 但度量的直观性与定量性毕竟有巨大的优势，相比之下，一致结构则显得缺少直观性，且往往难以处理. 那么，是否可用度量来描述一致结构呢？如果每个一致结构都可由某个度量生成，那么一致空间概念就没有必要了. 可以预料，仅用度量不足以描述所有一致结构. 但若将度量推广为某种伪度量族，则足以描述所有的一致结构.

4.2.8 定义 设 X 是一非空集. 若一函数 $d: X\times X\to \mathbf{R}_+$ 满足距离公理(D_1)(D_2)(依定义2.1.14)，则称 d 为 X 上的一个**伪度量**. 若 X 上的一伪度量族 D 满足条件：

$$(D_3)\ x=y \Leftrightarrow \forall\, d\in D,\ 有\ d(x,y)=0 \quad (x,y\in X),$$

则称 D 为 X 上一个分离点的伪度量族.

本节中说到伪度量族时，总认定它是分离点的伪度量族，因此常略去“分离点的”这一修饰词.

设 X 上已给定伪度量族 D，约定(对照式(1))

$$\begin{cases}\mathscr{V}=\{V_{dr}: d\in D, r>0\},\\ V_{dr}=\{(x,y)\in X\times X: d(x,y)<r\}.\end{cases} \tag{13}$$

4.2.9 定理 (i) 设 X 是一非空集，D 是 X 上一族分离点的伪度量，$\mathscr{V}$ 依式(13). 则以 $\mathscr{V}$ 为子基生成 X 上的一个一致结构 $\mathscr{U}$. 任给 X 中的网 $\{x_t\}\subset X$ 与 $x\in X$，依 X 上的一致拓扑有

$$x_t\to x \Leftrightarrow d(x_t,x)\to 0 \quad (\forall\, d\in D). \tag{14}$$

(ii) 设 (X,$\mathscr{U}$) 是一个一致空间，则必存在 X 上的伪度量族 D，使得依式(13)表出的集族 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的基.

定理中的 $\mathscr{U}$ 称为由伪度量族 D 生成的一致结构，而称 D 为 $\mathscr{U}$ 的一个**生成伪度量族**；当 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的基时称 D 为 $\mathscr{U}$ 的一个**基本伪度量族**. 定理4.2.9(ii)表明，一致结构的基本伪度量族恒存在(但未必唯一)，这就使得对一致结构的研究可完全依赖于颇具直观性的伪度量族.

证 结论(ii)的证明要用到一些精细的构造，此处从略. 下面仅证结论(i). 如同式(2)一样，V_{dr} 也满足类似的条件：

$$V_{dr} = V_{dr}^{-1}, \quad V_{dr} \circ V_{dr} \subset V_{d,2r}, \quad \bigcap_{d \in D, r>0} V_{dr} = \Delta.$$

由此易见 $\mathscr{V}$ 满足命题4.2.2中的条件(ii)～(iv)，因此以 $\mathscr{V}$ 为子基生成 X 上的一个一致结构 $\mathscr{U}$. 令

$$B_{dr}(x) = V_{dr}(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}, \tag{15}$$

不妨将 $B_{dr}(x)$ 看作由伪度量 d 定义的"球"，则

$$\{B_{dr}(x) : d \in D, r > 0\} \quad (x \in X) \tag{16}$$

是 x 的邻域子基(用定理4.2.3(ii)). 给定网 $\{x_t\} \subset X, x \in X$，有

$$x_t \to x \Leftrightarrow \forall\, d \in D, \forall\, r > 0, \exists\, t_0, \forall\, t \geqslant t_0,$$
$$\text{有 } x_t \in B_{dr}(x) \quad (\text{用 2.1 节式(9)})$$
$$\Leftrightarrow \forall\, d \in D, \text{有 } d(x_t, x) \to 0,$$

这就证实了等价关系式(14). □

注意，一致结构与伪度量族之间并非成一一对应关系：同一个一致结构可由多个(实际上是无限多个)伪度量族生成，所有这些伪度量族都被看作是互相一**致等价**的. 一致等价的两个伪度量族可能差别甚大. 设 D 与 D_1 是 X 上的两个伪度量族，$\mathscr{V}$ 依式(13)，而 $\mathscr{V}_1$ 对应于 D_1，则 D 与 D_1 一致等价 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{V}$ 与 $\mathscr{V}_1$ 生成同一个一致结构；后者又等价于

$$\mathscr{V}^* \vdash \mathscr{V}_1^* \vdash \mathscr{V}^*.$$

在一致空间理论中，伪度量族可在两方面发挥作用，其一是用来定义一致结构，其二是用作研究一致拓扑性质的一种有效工具. 对于前者，下面就是几个可用作说明的简单例子.

4.2.10 例　(i) 任给 $x = (x_i)$ 与 $y = (y_i) \in \mathbf{R}^n$，定义

$$d_i(x,y) = |x_i - y_i| \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

则 $\{d_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上一个分离点的伪度量族. 设 d 是 $\mathbf{R}^n$ 上的Euclid 度量，则显然有

$$d_i(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant \sum d_i(x,y) \quad (x, y \in \mathbf{R}^n).$$

设 V_r 依式(1)，V_{dr} 依式(13)，则由以上不等式推出：

$$V_r \subset \bigcap_i V_{d_i r} \subset V_s \quad (s = nr).$$

由此可见，$\mathbf{R}^n$ 上的伪度量族 $\{d_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 与Euclid 度量 d 生成同一个一致结构 $\mathscr{U}$；或者说，伪度量族 $\{d_i\}$ 与度量 d 一致等价！而从形式上看，$\{d_i\}$ 与 d 是差别颇大的.

(ii) 取 $X = \mathbf{R}^\Omega$，Ω 是任一非空集. 任给 $\omega \in \Omega$，定义

$$d_\omega(x,y) = |x(\omega) - y(\omega)| \quad (x, y \in X),$$

则 $D = \{d_\omega : \omega \in \Omega\}$ 是 X 上一个分离点的伪度量族. 设

$$P_\omega : X \to \mathbf{R}, \quad x \to x(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

是投影，$V_r = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : |u-v| < r\}$，则

$$(P_\omega \times P_\omega)^{-1}V_r = \{(x,y) \in X \times X : (P_\omega x, P_\omega y) \in V_r\}$$
$$= \{(x,y) \in X \times X : |x(\omega) - y(\omega)| < r\}$$
$$= \{(x,y) \in X \times X : d_\omega(x,y) < r\} \triangleq V_{\omega r}.$$

结合命题4.2.7与定理4.2.9可看出，X 上由伪度量族 D 生成的一致结构（即由子基 $\{V_{\omega r} : \omega \in \Omega, r > 0\}$ 生成的一致结构）恰为 $\mathbf{R}^\Omega$ 上的积一致结构.

你一定注意到，若在(ii)中取 $\Omega = \{1,2,\cdots,n\}$，则(ii)中的讨论与(i)完全一致.

(iii) 设 $(X_i, \mathscr{U}_i)(i \in I)$ 是一族一致空间，$\mathscr{U}_i$ 由伪度量族 D_i 生成，$X = \prod X_i$. 对任给 $d_i \in D_i$，定义

$$\widetilde{d}_i(x,y) = d_i(x_i, y_i) \quad (x,y \in X),$$

则 $D = \{\widetilde{d}_i : d_i \in D_i, i \in I\}$ 是 X 上一个分离点的伪度量族. 设 $P_i : X \to X_i$ 是投影，记号 V_{dr} 依式(13)，则

$$(P_i \times P_i)^{-1}V_{d_i r} = \{(x,y) \in X \times X : d_i(x_i, y_i) < r\}$$
$$= \{(x,y) \in X \times X : \widetilde{d}_i(x,y) < r\}$$
$$\triangleq \widetilde{V}_{d_i r}.$$

对照命题4.2.7与定理4.2.9看出，X 上由伪度量族 $\{\widetilde{d}_i : d_i \in D_i, i \in I\}$ 生成的一致结构恰为 X 上的积一致结构.

定理4.2.9(ii)断言基本伪度量族存在，这一事实有以下重要的拓扑推论.

4.2.11 定理 设 (X,τ) 是一个拓扑空间，则 τ 是某个一致结构 $\mathscr{U}$ 生成的一致拓扑 $\Leftrightarrow X$ 是全正则空间.

证 首先设 $(X,\mathscr{U})$ 是一致空间，τ 是其一致拓扑，D 是生成 $\mathscr{U}$ 的基本伪度量族（依定理4.2.9(ii)），记号 V_{dr} 依式(13)，则 $\{V_{dr} : d \in D, r > 0\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个基，因而

$$\mathscr{B} = \{B_{dr}(x) : d \in D, r > 0, x \in X\} \quad (\text{用式(15)})$$

是 X 的一个拓扑基（参看定理4.2.3(ii)）. 取定 $d \in D, r > 0, x \in X$，只要证 $B_{dr}(x)$ 是余零集（于是由定理3.1.12推出 X 为全正则空间）. 令 $f(y) = d(x,y)(y \in X)$，则 $B_{dr}(x) = \{f < r\}$，因此只要证 $f \in C(X)$（参看引理3.1.9）. 易验证（参照2.2节式(10)）

$$|f(y) - f(z)| \leqslant d(y,z).$$

由此直接看出 $f(y)$ 连续（用式(14)）.

反之，若 X 是全正则空间，则有非空集 Ω 与拓扑嵌入 $F : X \to J^\Omega, J = [0,1]$. 因 J^Ω 是一致空间（依命题4.2.7(ii)），故 $Y \triangleq FX$ 作为 J^Ω 的子空间亦是一致空间. 以 $\mathscr{V}$ 记 Y 上的一致结构，令

$$\mathscr{U} = (F \times F)^{-1}\mathscr{V}. \tag{17}$$

因 $F : X \to Y$ 是双射，故 $\mathscr{U}$ 必满足定义 4.2.1 中的公理(U_1)～(U_4)，因而是 X 上的一个一致结构. 式(17)表明，$F : (X,\mathscr{U}) \to (Y,\mathscr{V})$ 是一致同构，因而 $\mathscr{U}$ 生成的一致拓扑就是 τ. □

已证的这个结果表明，就一致空间的拓扑性质而言，一致空间至少不会弱于全正则空间；另一方面，也不能指望所有的一致空间都会真正强于全正则空间，例如一致空间未必都是正规空间. 此外，也不应从定理 4.2.11 得出结论：一致空间都会一致同构于某个 J^{Ω} 的子空间，尽管一个一致空间确实可拓扑嵌入某个 J^{Ω}.

生成伪度量族与基本伪度量族的差别，实际上就是子基与基的差别. 一般来说，生成伪度量族更简单些，只要够用就不必用基本伪度量族去取而代之. 但总不免要用到基本伪度量族，例如定理 4.2.11 之证明就是如此. 正如每个子基可通过作有限交转化成基一样，每个生成伪度量族亦可通过相应的方法改造成基本伪度量族. 下面分三种情况考虑.

(i) 一般情况. 设 D 是一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 的生成伪度量族，以 Σ 记 D 的非空有限子集之全体. 任给 $\sigma = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\} \in \Sigma$，定义

$$d_\sigma(x,y) = \max_i d_i(x,y) \quad (x,y) \in X, \tag{18}$$

则 d_σ 是 X 上的一个伪度量，且

$$d_\sigma(x,y) < r \Leftrightarrow d_i(x,y) < r \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

这正表明 $V_{d_\sigma r} = \bigcap V_{d_i r}$（记号依式(13)). 因形如 $V_{d_\sigma r}$ 的集构成 $\mathscr{U}$ 的基，故我们已将 D 扩张为一个基本伪度量族：

$$D_1 = \{d_\sigma : \sigma \in \Sigma\}.$$

将以上作法用到定理 4.2.10(ii)，对任何 $\sigma = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\} \subset \Omega$，有

$$d_\sigma(x,y) = \max_i |x(\omega_i) - y(\omega_i)| \quad (x,y \in \mathbf{R}^{\Omega}). \tag{19}$$

(ii) 可数伪度量族. 设 $D = \{d_i : i \in \mathbf{N}\}$ 是一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 的生成伪度量族，定义

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}[d_i(x,y) \wedge 1], \tag{20}$$

则 d 是 X 上的一个度量. 你会觉得式(20)似曾相识. 4.1 节式(7)确实就是一个类似的公式，但二者并不完全一致. 不过，可将 4.1 节式(8)改造成

$$\begin{cases} d(x,y) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} d_i(x,y) + \frac{1}{2^n}, \\ d_i(x,y) \wedge 1 \leqslant 2^i d(x,y). \end{cases} \tag{21}$$

任给 $r > 0$，令 $\delta = 2^n r$，则从不等式(21)不难推出：

$$\left.\begin{array}{l} d_i(x,y) < r, \quad \delta > 1 \Rightarrow d(x,y) < 2r; \\ d(x,y) < r, \quad \delta < 1 \Rightarrow d_i(x,y) < \delta \end{array}\right. \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

这相当于

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_{d_i r} \subset V_{d,2r} \quad (2^n r > 1),$$

$$V_{dr} \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_{d_i \delta} \quad (\delta = 2^n r < 1).$$

这表明 d 与 $\{d_i\}$ 生成同一个一致结构，即二者一致等价.

(iii) 有限伪度量族. 设 $D = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ 是一致空间 $(X, \mathscr{U})$ 的生成伪度量族，定义

$$d(x,y) = \max_i d_i(x,y) \quad (x, y \in X),$$

则 d 是 X 上的一个度量. 类似于前面的分析(更简单些)，可知 d 与 $\{d_i\}$ 一致等价.

以上讨论表明，由可数伪度量族定义的一致空间实际上并未越出度量空间的范围之外. 只有对于不可数伪度量族定义的一致空间，发展一致空间的一般理论才是真正有意义的.

一致空间理论的主要研究对象无疑是一致拓扑性质. 对于度量空间，我们重点考虑的是完备性与全有界性，这些性质亦是一致空间理论首先所关注的. 我们将发现，关于度量空间完备性与全有界性所建立的结论，都可在某种形式下推广于一致空间. 在实现这种推广时，我们有两个工具可用：一致结构与伪度量族. 两者的作用实质上等价，而就其简便性而言，则可能依情况互有差异，不能一概而论. 下面就来分别考虑完备性与全有界性.

C. 完备性

本段可看作是 4.1B 的推广.

以下设 $(X, \mathscr{U})$ 是给定的一致空间，D 是 $\mathscr{U}$ 的生成伪度量族. 对于概念与结论的表述，我们将依方便或者使用 $\mathscr{U}$ 或者使用 D.

4.2.12 定义 若一个网 $\{x_t\} \subset X$ 满足如下 **Cauchy 条件**：

$$\forall U \in \mathscr{U}, \exists t_0, \forall s, t \geqslant t_0, \text{有} (x_s, x_t) \in U, \tag{22}$$

则称 $\{x_t\}$ 为 **Cauchy 网**. 若 X 中每个 Cauchy 网收敛，则称 X 为完备一致空间，简称为**完备空间**.

为应用方便，下面写出 Cauchy 条件的几种等价形式：

$$\forall V \in \mathscr{V}, \exists t_0, \forall t \geqslant t_0, \text{有} (x_t, x_{t_0}) \in V; \tag{22a}$$

$$\forall d \in D, \text{有} \lim_{s,t} d(x_s, x_t) = 0; \tag{22b}$$

$$\forall d \in D, \text{有 } \operatorname{diam}_d A_t \to 0, \tag{22c}$$

其中 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的任何(或某个)子基，$A_t = \{x_s : s \geqslant t\}$，

$$\mathrm{diam}_d A = \sup_{a,b \in A} d(a,b). \quad \text{(对照 2.1 节式(25))} \tag{23}$$

与4.1 节式(15)对照,条件(22b)相当于:关于每个伪度量 $d \in D$, $\{x_t\}$ 满足 Cauchy 条件 4.1 节式(15). 条件(22a)~(22c)的等价性是明显的. 至于条件(22a)与(22)的等价性,则正如2.1节中的网收敛条件(7)′与(9)的等价性,都基于指标集的有向性.

下面是定理4.1.5的某种推广.

4.2.13 定理 对于一致空间 X,以下条件互相等价:

(i) X 是完备空间;

(ii) X 中每个Cauchy 网有收敛子网;

(iii) 若 $\mathscr{B}$ 是 X 中有限相交的闭集族,它满足条件

$$\forall\, d \in D, \forall\, r > 0, \exists\, B \in \mathscr{B}, \text{使}\ \mathrm{diam}_d B < r \tag{24}$$

(记号依式(23)),则 $\bigcap \mathscr{B} \neq \varnothing$.

证 (i)⇔(ii). 只需证(ii)⇒(i). 设 $\{x_t\} \subset X$ 是一Cauchy 网,它有一收敛子网 $\{x_{t_\delta}\}$, 设 $x_{t_\delta} \to x$. 由

$$d(x_t, x) \leqslant d(x_t, x_{t_\delta}) + d(x_{t_\delta}, x) \quad (d \in D)$$

及Cauchy 条件(22b)看出 $d(x_t, x) \to 0 (\forall\, d \in D)$, 因而 $x_t \to x$ (用式(14)). 这得出 X 完备.

(i)⇔(iii). 首先设 X 完备,$\mathscr{B}$ 如条件(iii),则不妨设 $\mathscr{B} = \mathscr{B}^*$ (否则以 $\mathscr{B}^*$ 取代 $\mathscr{B}$,$\mathscr{B}^*$ 显然亦满足(iii)中的条件). $\forall\, B \in \mathscr{B}$, 取 $x_B \in B$,$\mathscr{B}$ 依⊃为有向集,故 $\{x_B : B \in \mathscr{B}\}$ 是 X 中的一个网. 由条件(24)推出 $\{x_B\}$ 是Cauchy 网. 设 $x_B \to x$, 则显然有 $x \in \bigcap \mathscr{B}$.

其次设条件(iii)满足, $\{x_t\} \subset X$ 是一Cauchy 网,今证 $\{x_t\}$ 有一收敛子网(因而 X 完备). 令 $A_t = \{x_s : s \geqslant t\}$, 则 $\mathscr{B} \triangleq \{\overline{A}_t\}$ 是有限相交的闭集族. 用条件(22c)得出,

$$\forall\, d \in D, \forall\, r > 0, \exists\, t: \mathrm{diam}_d A_t < r;$$

由此易推出 $\mathrm{diam}_d \overline{A}_t \leqslant r$. 因此 $\mathscr{B}$ 满足条件(24),故 $\bigcap \overline{A}_t \neq \varnothing$. 由定理3.2.2证明中的(iii)⇒(iv)之证,知 $\{x_t\}$ 有收敛子网,如所要证. □

定理4.2.13中的条件(iii)显然可看作定理4.1.5(ii)的一个推广形式. 至于定理4.2.13(ii),则不免使人联想到紧拓扑空间的以下刻画:每个网有收敛子网. 尽管后者是一个更强的条件,但还是表明,完备性与紧性有某种可互相对照之处. 了解这一点,对于理解完备性不无益处. 大致可以说:附加适当的条件(这种条件由一致结构或伪度量族描述)之后,基于紧性的结论亦在完备空间中成立. 例如,对完备空间中的网附加Cauchy 条件之后,就有收敛子网;附加条件(24)之后,完备空间中的有限相交闭集族就有非空交(这恰相当于刻画紧性的定

理3.2.2(iii)). 这些事实是你在考虑完备一致空间时不可不注意的.

从形式上看,关于完备性的一些命题与关于紧性的相应结果亦可互相对照. 例如,类似于定理3.2.3有以下命题.

4.2.14 命题 一致空间 X 的完备子空间是闭的.

证明是平凡的.

以下结果自然应与定理3.2.4对应了.

4.2.15 命题 (i) 完备性是闭遗传的,即完备一致空间的闭子空间是完备的.

(ii) 设 X 是一致空间 $(X_i,\mathscr{U}_i)(i\in I)$ 的积空间,则 X 是完备的$\Leftrightarrow$ 每个 X_i 是完备的. 因此,完备性是可乘的.

(iii) 完备性在一致同构映射下保持不变. 因此,完备性是一致拓扑性质.

证 (i)与(iii)是明显的,只证(ii). 若 X 完备,则 $X_i(i\in I)$ 作为 X 的闭子空间亦必完备. 反之,设每个 X_i 完备,今证 X 完备. 设 $\{x^t\}\subset X$ 是一Cauchy 网. $\forall i\in I, U\in\mathscr{U}_i$, 因 $(P_i\times P_i)^{-1}U\in\mathscr{U}$ (依命题4.2.7(ii), P_i 是投影),故由Cauchy 条件(22)有:

$$\exists\, t_0, \forall\, s,t\geqslant t_0, 有\,(x^s,x^t)\in(P_i\times P_i)^{-1}U,$$

即

$$\exists\, t_0, \forall\, s,t\geqslant t_0, 有\,(x_i^s,x_i^t)\in U.$$

这表明 $\forall\, i\in I$, $\{x_i^t\}$ 是 X_i 中的Cauchy 网. 由 X_i 的完备性,有 $x_i^t\to x_i(i\in I)$, 因而 $x^t\to x=(x_i)$. 这表明 X 是完备的. □

从形式上看,命题4.2.15(ii)与关于紧性的Tychonoff 定理恰相对应,但从证明的难易来看,二者是完全不相当的,命题4.2.15(ii)是一个比较平凡的结论. 另一方面,命题4.2.15 自然是4.1.6的推广. 与4.1.6比较,一个明显的区别是:对于一致空间来说,完备性的可乘性并无"可数"的限制,这是一般的一致空间概念与度量空间概念相比的优势之一. 利用命题4.2.15立即得出:对任何非空集 Ω, 一致空间 $\mathbf{R}^{\Omega}$ 是完备的. 如果限制在度量空间的范围内,仅能说到 $\mathbf{R}^{\omega}$ 的完备性.

D. 全有界性与紧性

有了上段的经验,现在我们更清楚,与4.1C相对照,此处应该作什么. 与4.1C中不同的是,对于一致空间 X, 我们可依方便运用一致结构 $\mathscr{U}$ 或伪度量族 D. 首先是推广定义4.1.7.

4.2.16 定义 设 $(X,\mathscr{U})$ 是一个一致空间, $A\subset X$. 若

$$\forall\, U\in\mathscr{U}, 存在有限集\, B\subset X, 使\, A\subset U(B), \tag{25}$$

则称 A 为**全有界集**. 若 X 本身是全有界集,则称 X 为**全有界空间**.

如同Cauchy 条件一样,全有界条件(25)亦可表成多种等价形式,如

$$\forall V \in \mathscr{V}, \text{存在有限集 } B \subset X, \text{使 } A \subset V(B); \tag{25a}$$

$$\forall d \in D, \forall \varepsilon > 0, \text{存在有限个 } x_i \in X, \text{使 } A \subset \bigcup B_{d\varepsilon}(x_i), \tag{25b}$$

其中$\mathscr{V}$ 是$\mathscr{U}$ 的任何(或某个)基，D 是生成$\mathscr{U}$ 的任何(或某个)基本伪度量族，$B_{d\varepsilon}(x) = V_{d\varepsilon}(x)$. 注意，若 $a_i \in A \cap B_{d\varepsilon}(x_i)$，则 $B_{d\varepsilon}(x_i) \subset B_{d\delta}(a_i)$，$\delta = 2\varepsilon$. 因此对于条件(25b)可要求 $x_i \in A$. 这就表明，A 为全有界集与它作为子空间全有界两者是一致的.

下面是引理4.1.8的推广.

4.2.17 引理　$A \subset X$ 全有界 $\Leftrightarrow A$ 中任何网有Cauchy子网(即满足Cauchy条件的子网).

证　只需对 $A = X$ 证明. 首先设 X 全有界，$\{x_t : t \in T\}$ 是 X 中一个网. 令 $A_t = \{x_s : s \geqslant t\}$，则 $\{A_t : t \in T\}$ 是有限相交的，因而必生成一个滤子(用命题1.1.11)，进而又可设它含于某个超滤子 $\mathscr{A}$(用定理1.2.8). $\mathscr{A}$ 有以下性质：$\forall A \subset X$，有 $A \in \mathscr{A}$ 或 $A^c \in \mathscr{A}$. $\mathscr{A}$ 依$\supset$是一有向集，因而 $\Delta = T \times \mathscr{A}$ 亦为有向集. 任给 $\delta = (t, A) \in \Delta$，有 $A \cap A_t \neq \varnothing$，故有 $t_\delta \geqslant t$，使得 $x_{t_\delta} \in A$. 易见 $\{x_{t_\delta}\}$ 是 $\{x_t\}$ 的一个子网，今证 $\{x_{t_\delta}\}$ 满足Cauchy条件. 任给 $d \in D, \varepsilon > 0$，由全有界性，有有限个 $x_i \in X, B_i = B_{d\varepsilon}(x_i)$，使得 $X = \bigcup B_i$. 必有某个 $B_i \in \mathscr{A}$，否则 $\varnothing = \bigcap B_i^c \in \mathscr{A}$！固定 $B = B_i \in \mathscr{A}$ 与 $t_0 \in T$，令 $\delta_0 = (t_0, B)$，则当 $\delta = (t, A) \geqslant \delta_0$ 时有 $x_{t_\delta} \in A \subset B$，因而

$$d(x_{t_\delta}, x_{t_{\delta'}}) < 2\varepsilon \quad (\delta, \delta' \geqslant \delta_0).$$

这正表明 $\{x_{t_\delta}\}$ 满足Cauchy条件(22b).

反之，设 X 非全有界，则有 $U \in \mathscr{U}$，使得对任何有限集 $B \subset X$ 有 $X \neq U(B)$. 任取 $x_1 \in X$，必有 $x_2 \in X \backslash U(x_1), x_3 \in X \backslash U(\{x_1, x_2\}), \cdots$，如此得到无穷序列 $\{x_n\}$，它有性质：

$$(x_n, x_m) \overline{\in} U \quad (m > n \geqslant 1).$$

$\{x_n\}$ 显然不可能有Cauchy子网(看条件(22)). □

如果说引理4.2.17与引理4.1.8还有些差别(引理4.1.8只涉及序列)，那么，命题4.1.9几乎可一字不差地推广到一致空间.

4.2.18 命题　(i) 全有界性是遗传的，即全有界集的子集是全有界的.

(ii) 全有界性是可乘的，即任何一族全有界一致空间 $(X_i, \mathscr{U}_i)(i \in I)$ 的积空间 X 是全有界的.

(iii) 全有界性在一致连续映射下保持不变，即若 $(X, \mathscr{U})$ 与 $(Y, \mathscr{V})$ 是一致空间，$F : X \to Y$ 一致连续，则 FX 在 Y 中全有界. 因此，全有界性是一致拓扑性质.

(iv) 若 $A, B \subset X$ 全有界，则 $A \cup B$ 与 $\overline{A}$ 均全有界.

证　(i)是明显的.

(ii) 依命题4.2.7(ii)中的记号,取积一致结构中的一集

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} (P_{i_k} \times P_{i_k})^{-1} U_k,$$

其中 $U_k \in \mathscr{U}_{i_k} (1 \leqslant k \leqslant n)$. 取有限集 $B_k \subset X_{i_k}$, 使得 $X_{i_k} = U_k(B_k) (1 \leqslant k \leqslant n)$. 对任给 $i \in I \setminus \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$, 取定 $b_i \in X_i$, 则

$$B = \prod_{k=1}^{n} B_k \times \prod_{i \neq i_1, \cdots, i_k} \{b_i\}$$

是 X 的有限子集. 今验证 $X = U(B)$ (从而 X 是全有界的,用条件(25a)). 任给 $x = (x_i) \in X$, 取 $b_k \in B_k$, 使 $x_{i_k} \in U_k(b_k)$; 取 $b \in B$, 使 $P_{i_k} b = b_k (1 \leqslant k \leqslant n)$, 则

$$(P_{i_k} \times P_{i_k})(b, x) = (b_k, x_{i_k}) \in U_k \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

这表明 $(b, x) \in U$, 因而 $x \in U(b) \subset U(B)$, 如所要证.

(iii) 利用引理4.2.17所提供的对全有界性的"Cauchy 子网刻画",证明是直接的.

(iv) $A \cup B$ 的全有界性是明显的. 今证 $\overline{A}$ 全有界. 任给 $U \in \mathscr{U}$, 取 $V \in \mathscr{U}$, 使 $V \circ V \subset U$; 取有限集 $E \subset X$, 使 $A \subset V(E)$. 于是

$$\overline{A} \subset V(A) \subset (V \circ V)(E) \subset U(E), \quad (\text{用式}(5))$$

这表明 $\overline{A}$ 是全有界的. □

至于定理4.1.10中的紧性条件,多半与度量有关,因而并不能完全推广于一致空间. 不过,定理4.1.10仍然有如下部分推广.

4.2.19 定理　对一致空间 $(X, \mathscr{U})$, 以下条件互相等价:

(i) X 是紧空间;

(ii) X 是完备的与全有界的;

(iii) X 全有界,且对 X 的任何开覆盖 $\mathscr{A}$, 存在 $U \in \mathscr{U}$, 使得

$$\{U(x) : x \in X\} \prec \mathscr{A}. \qquad (\text{对照 4.1 节式}(18)) \tag{26}$$

满足条件(26)的 $\mathscr{A}$ 称为 X 的**一致覆盖**. 因此,条件(iii)可改述为: X 全有界且其开覆盖均为一致覆盖.

证　结合定理4.2.13,引理4.2.17与定理3.2.2,(i)⇔(ii)是显然的.

(i)⇔(iii). 设 X 是紧空间, $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖. 若 $\forall U \in \mathscr{U}$, (26)不成立, 则存在 $x_U \in X$, 使得

$$U(x_U) \not\subset A \quad (U \in \mathscr{U}, A \in \mathscr{A}). \tag{27}$$

$\mathscr{U}$ 依 $\supset$ 为有向集, 因此 $\{x_U\}$ 是 X 中的一个网, 它有收敛子网, 为记号简便, 不妨就设 $x_U \to x$. 取 $A \in \mathscr{A}$, 使 $x \in A$. 因 x 是 A 的内点, 故有 $V \in \mathscr{U}$, 使 $(V \circ V)(x) \subset A$. 取 $U \in \mathscr{U}$, 使 $U \subset V$, 且 $x_U \in V(x)$, 则

$$U(x_U) \subset (U \circ V)(x) \subset (V \circ V)(x) \subset A,$$

这与式(27)相矛盾. 反之设条件(iii)满足, $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖. 取 $U \in \mathscr{U}$, 使式(26)满足. 由全有界性, 有有限集 $\{x_i\}$, 使得 $X = \bigcup U(x_i)$. 取 $A_i \in \mathscr{A}$ 使 $U(x_i) \subset A_i$, 则 $\{A_i\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的有限子覆盖. 这表明 X 是紧空间. □

结合命题 4.2.14, 命题 4.2.15, 命题 4.2.18 与定理 4.2.19 得到以下结论.

4.2.20 推论　设 X 是一致空间, $A \subset X$, 则以下结论成立:

(i) A 是紧集 $\Rightarrow$ A 是全有界闭集, A 是相对紧集 $\Rightarrow$ A 是全有界集.

(ii) 若 X 是完备空间, 则 A 是紧集 $\Leftrightarrow$ A 是全有界闭集; A 是相对紧集 $\Leftrightarrow$ A 是全有界集.

最后就是定理 4.1.13 的推广了, 这件事已经很简单.

4.2.21 定理　设 $(X, \mathscr{U})$ 是紧一致空间, $(Y, \mathscr{V})$ 是一致空间, $F \in C(X, Y)$, 则 F 一致连续.

证　设 F 非一致连续, 则有 $V \in \mathscr{V}$, 使得

$$(F \times F)U \not\subset V \quad (\forall U \in \mathscr{U}).$$

不妨设 V 是开集(参看 4.2.4(ii)). $\forall U \in \mathscr{U}$, 取 $(x_U, y_U) \in U$, 使 $(Fx_U, Fy_U) \overline{\in} V$. 由 X 的紧性可取子网 $\{x_{U'}\}$, 使 $x_{U'} \to x$; 易见亦有 $y_{U'} \to x$, 因而由 F 连续与 V^c 为闭集有:

$$(Fx_{U'}, Fy_{U'}) \to (Fx, Fx) \in V^c,$$

这与 $(Fx, Fx) \in V$ 相矛盾. □

对照定理 4.1.13 与 4.2.21, 可知二者实际上运用了同样的证法: 收敛子网(或子列)论证. 子网概念确实不如子列概念那样直观清晰. 对于如何从一个网取出子网, 你可能尚无明确印象. 但在理论证明中, 这种差别并不真正妨碍对于网的运用. 一旦积累了一定经验, 你会乐意使用收敛子网论证的.

连续函数的一致连续性定理在分析中有多大用处, 想必你是深有体会的. 自然, 定理 4.2.21 的重要性亦不容低估. 不过, 此处并不打算去考虑其他领域的应用 例子, 只是指出, 将定理 4.2.21 用于一致空间理论自身, 可得出两条重要推论. 前面我们曾指出, 用定理 4.2.11 并不能断定一致空间都是某个方体 J^{Ω} 的子空间. 但对于紧一致空间则应另当别论.

4.2.22 推论　对于一个紧一致空间 X 有以下结论:

(i) X 可一致同构地嵌入 J^{Ω}, $J = [0,1]$, Ω 是某个非空集.

(ii) X 上具有同一个一致拓扑的一致结构是唯一的.

证　只要指出, 若 $F: X \to J^{\Omega}$ 是拓扑嵌入, $Y = FX$, 则由定理 4.2.21 推出 $F: X \to Y$ 必为一致同构; X 上的一致结构通过 F 由 Y 上的一致结构唯一决定. □

4.3 函数空间

在展开度量(或一致)空间一般理论的这条崎岖道路上，我们已走过很长一段路程了. 尽管已看到了一些出色的定理，但很可能仍然感到这个理论有些空洞，没有见到多少实例用作支撑. 现在就该看一些较具体的空间了. 首先应肯定，度量(或一致)空间的例子绝不缺乏，实际上多得难见其一斑. 应用上最重要的度量(或一致)空间通常以函数空间的形式出现. 一些最重要的函数空间，例如 L^p 空间及更一般的Sobolev 空间，是泛函分析的对象，并不宜在这里讨论. 本节限于考虑连续函数空间，且所作的讨论主要服务于解释本章中的一般结论这一目的.

在本节中，Ω 记一给定的LCH. 依对 Ω 的假设不同，在 $C(\Omega)$ 中或可定义度量，或只能定义某个一致结构.

A. 度量的导入

首先设 Ω 是第二可数的LCH，在这种情况下，可用标准方式将 $C(\Omega)$ 定义为度量空间.

导入度量的方法有两个. 其一是首先定义某种“拟范数”. 取 Ω 中一个紧集列 $\{K_n\}$，使 $\{K^\circ_n\}$ 覆盖 Ω，例如可取 Ω 中紧集的一个穷竭序列 $\{K_n\}$ (依定理3.2.15). 定义

$$\begin{cases} \|u\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\|u\|_n \wedge 1) \quad (u \in C(\Omega)), \\ \|u\|_n = \max_{x \in K_n} |u(x)| \qquad (n \in \mathbf{N}). \end{cases} \tag{1}$$

连续函数 $|u(x)|$ 在紧集 K_n 必取得最大值(依命题3.2.5(ii))，因此 $\|u\|_n$ 有意义. 式(1)中的和式自然使你联想到4.1节式(7)或4.2节式(20)，对于它的特点是早已了然于胸的，这会使我们下面作得顺利些. 利用式(1)容易直接验证(以下设 $u,v \in C(\Omega)$)：

(i) 对称性：$\|-u\| = \|u\|$；

(ii) 三角不等式：$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$；

(iii) 正定性：$\|u\| \geqslant 0$, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0$.

对于性质(iii)的验证用到 $\{K_n\}$ 覆盖 Ω 这一事实. 现在定义

$$d(u,v) = \|u-v\| \quad (u,v \in C(\Omega)), \tag{2}$$

则从 $\|\cdot\|$ 的性质(i)～(iii)恰好推出 d 满足距离公理(D_1)～(D_3)(依定义2.1.14)，因而 d 是 $C(\Omega)$ 上的一个度量.

另一个方法是，首先定义一族伪度量：

$$d_n(u,v) = \max_{x \in K_n} |u(x) - v(x)| \quad (u,v \in C(\Omega), n \in \mathbf{N}),$$

$\{d_n : n \in \mathbf{N}\}$ 显然分离 $C(\Omega)$ 中的点. 然后用4.2节式(20)定义出度量 d:

$$d(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}[d_n(u,v) \wedge 1] \quad (u,v \in C(\Omega)). \tag{2}'$$

注意, $d_n(u,v) = \|u - v\|_n$, 式(2)与式(2)′实际上是一致的. 不过,用记号 $\|\cdot\|$ 更简便些,下面采用定义式(2).

4.3.1 命题 依式(2)定义的度量 d, $C(\Omega)$ 是一个完备度量空间. 任给序列 $\{u_k\} \subset C(\Omega)$ 与 $u \in C(\Omega)$, 有

$$u_k \to u \Leftrightarrow \text{在任何紧集 } K \subset \Omega \text{ 上有 } u_k(x) \rightrightarrows u(x), \tag{3}$$

其中 $u_k \to u$ 表示依量 d 收敛, $\rightrightarrows$ 表示一致收敛(下同).

证 直接看出 $u_k \to u \Leftrightarrow u_k - u \to 0$, 故只要考虑向0的收敛. 其次注意 $u_k \to 0 \Leftrightarrow \|u_k\| \to 0$. 类似于4.2节式(21),有不等式:

$$\begin{cases} \|u\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}\|u\|_i + \dfrac{1}{2^n} & (n \in \mathbf{N}), \\ \|u\|_i \wedge 1 \leqslant 2^i \|u\| & (i \in \mathbf{N}). \end{cases} \tag{4}$$

由式(4)推出:

$$\begin{aligned} \|u_k\| \to 0 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}, \text{有 } \|u_k\|_n \to 0 \quad (k \to \infty) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}, \text{在 } K_n \text{ 上 } u_k(x) \rightrightarrows 0 (k \to \infty). \end{aligned} \tag{5}$$

因 $\{K^{\circ}_n : n \in \mathbf{N}\}$ 覆盖 Ω, 故任何紧集 $K \subset \Omega$ 必被有限个 K_n 覆盖,这就从式(5)推出收敛性刻画式(3).

下面证完备性. 设 $\{u_k\} \subset C(\Omega)$ 是一Cauchy序列,则

$$\|u_k - u_m\| \to 0 \quad (k,m \to \infty). \tag{6}$$

类似于式(5),由式(6)推出

$$\forall n \in \mathbf{N}, \text{在 } K_n \text{ 上 } u_k(x) - u_m(x) \rightrightarrows 0. \quad (k,m \to \infty) \tag{7}$$

由此推出 $\{u_k(x)\}$ 在每点 $x \in \Omega$ 收敛,记其极限函数为 $u(x)$. 由式(7)推出

$$\forall n \in \mathbf{N}, \text{在 } K_n \text{ 上 } u_k(x) \rightrightarrows u(x) \quad (k \to \infty). \tag{8}$$

故 $u(x)$ 在 K_n (从而亦在 K°_n)上连续,因 $\{K^{\circ}_n\}$ 覆盖 Ω, 故 $u \in C(\Omega)$ (用拼接引理2.3.4). 由式(8)推出 $u_k \to u$(度量收敛), 这就证得 $C(\Omega)$ 是完备的. □

由条件(3)所描述的收敛通常称为**紧一致收敛**,即在每个紧集上一致收敛. 显然, $\{u_k\}$ 在每个紧集 $K \subset \Omega$ 上一致收敛 $\Leftrightarrow \{u_k\}$ 在每个 $K_n (n \in \mathbf{N})$ 上一致收敛. 鉴于条件(3)与 K_n 的选择无关,因此,空间 $C(\Omega)$ 上的度量拓扑并不依赖于 K_n 的选择(注意,度量 d 却与 K_n 的选择有关),而只依赖于收敛条件(3),因而不妨就称这种拓扑为 $C(\Omega)$ 上的**紧一致收敛拓扑**. 紧一致收敛拓扑既不太强(例如与一致收敛拓扑比较),又不太弱(例如与点态收敛拓扑比较),在应用上颇具优

势，因而被普遍使用.

因对 Ω 可作多种多样的选择，故空间 $C(\Omega)$ 具有大量形式各异的特例. 下面考虑一些常见的情形.

4.3.2 例　(i) 取 $\Omega=\mathbf{N}$，则 $\mathbf{N}$ 依离散拓扑是第二可数的LCH，$K\subset\mathbf{N}$ 为紧集 $\Leftrightarrow K$ 是有限集. 因任何 $x:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ 都连续(何故?)，故 $C(\mathbf{N})=\mathbf{R}^\omega$. 下面总将 $x\in\mathbf{R}^\omega$ 写作 (x_i). 任给序列 $\{x^k\}\subset\mathbf{R}^\omega$，$\{x^k\}$ 在$\mathbf{N}$ 上紧一致收敛 $\Leftrightarrow\{x^k\}$ 在每点 $i\in\mathbf{N}$ 收敛，因此

$$x^k\to 0\Leftrightarrow\forall\, i\in\mathbf{N}:x_i^k\to 0\quad(k\to\infty).$$

这就表明，$\mathbf{R}^\omega$ 中的收敛即依坐标收敛，因而 $\mathbf{R}^\omega$ 中的"紧一致收敛拓扑"就是积拓扑(参考例2.3.8(ii)).

至此，并未提到 $\mathbf{R}^\omega$ 中的度量. 所需的度量可依式(1)和式(2)定义. 例如，取 $K_n=\{n\}(\forall\, n\in\mathbf{N})$，得到如下度量公式：

$$\begin{cases}d(x,y)=\|x-y\|\quad(x,y\in\mathbf{R}^\omega),\\ \|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}(|x_n|\wedge 1).\end{cases}\tag{9}$$

依此度量，$\mathbf{R}^\omega$ 是一个完备度量空间.

(ii) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是任给非空开集，则 Ω 是一个第二可数的LCH，因而 $C(\Omega)$ 依式(1),(2)定义的度量是一个完备度量空间，其中的度量收敛即紧一致收敛，这意味着在 Ω 内每个有界闭集上一致收敛，在分析中通常称为**内闭一致收敛**.

为能依式(1),(2)写出度量 d，当 $\partial\Omega\neq\varnothing$ 时可依3.2节式(5)构成所需的序列 $\{K_i\}$. 若 $\Omega=\mathbf{R}^n$，则可取 $K_i=\overline{B}_i(0)$，于是 $C(\mathbf{R}^n)$ 中的度量 d 可表为

$$\begin{cases}d(u,v)=\|u-v\|,\qquad(u,v\in C(\mathbf{R}^n))\\ \|u\|=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\left[\max_{|x|\leqslant i}|u(x)|\wedge 1\right].\end{cases}\tag{10}$$

无论依式(1),(2)或式(10)，$d(u,v)$ 的计算都不会很简单. 但要强调指出，重要的是存在度量 d 使 $C(\Omega)$ 为完备度量空间，且其度量收敛就是紧一致收敛，至于 d 的具体表达式，则未必总需要，有时甚至根本不写出它. 因此，对稍显复杂的度量公式(10)，并不必介意.

(iii) 设 Ω 是紧拓扑空间，则完全不必用到紧集列 $\{K_n\}$，只需直接定义

$$\begin{cases}d(u,v)=\|u-v\|\quad(u,v\in C(\Omega)),\\ \|u\|=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|.\end{cases}\tag{11}$$

$C(\Omega)$ 依式(11)所定义的度量 d 是一个完备度量空间，其中的度量收敛就是在 Ω 上一致收敛.

(iv) 设 $\Omega_\infty=\Omega\cup\{\infty\}$ 是 Ω 的一点紧化(依定理3.2.17)，则 $u:\Omega_\infty\to\mathbf{R}$ 连续 $\Leftrightarrow u|\Omega$ 连续且 $\lim_{x\to\infty}u(x)=u(\infty)$. 若令

$$C_c(\Omega) = \{u \in C(\Omega): \lim_{x \to \infty} u(x) \text{ 存在且有限}\}, \tag{12}$$

则 $C(\Omega_\infty)$ 与 $C_c(\Omega)$ 之间存在一个自然的双射，即每个 $u \in C_c(\Omega)$ 对应它在 Ω_∞ 上的唯一连续扩张. 因此，若等同 $C_c(\Omega)$ 与 $C(\Omega_\infty)$，则 $C_c(\Omega)$ 是一个完备度量空间，其中的度量 d 仍依式(11)，而度量收敛即一致收敛.

特别，若取 $\Omega = \mathbf{N}$，则 $C_c(\mathbf{N})$ 就是收敛实数列的空间，它通常记作 c，即

$$c = \left\{(x_i) \in \mathbf{R}^\omega: \lim_i x_i \text{ 存在且有限}\right\},$$

其中的度量 d 定义为(依式(11))：

$$\begin{cases} d(x,y) = \| x - y \| \quad (x,y \in c), \\ \| x \| = \sup_i |x_i|. \end{cases}$$

在泛函分析中，c 是一个有用的空间.

B. 拓扑性质

仍设 Ω 是第二可数的LCH，在 $C(\Omega)$ 上采用紧一致收敛拓扑，现在考察空间 $C(\Omega)$ 的一些值得注意的拓扑性质. 因已知 $C(\Omega)$ 是度量空间，故它具有最好的分离性质(参考3.1节). 其次，易见 $C(\Omega)$ 同时也是向量空间，且向量的线性运算是连续的，利用这些事实不难推出 $C(\Omega)$ 的连通性与局部连通性. 由此可见，就分离性与连通性而言，$C(\Omega)$ 都应列入最好的拓扑空间之内. 就本书所涉及的拓扑性质而言，余下要关注的只是 $C(\Omega)$ 的可分性(这等价于第二可数性，参考命题2.4.12)，以及 $C(\Omega)$ 中子集的紧性与相对紧性. 以下所述的一些结论，对于现代数学的许多领域都是基本而常用的.

首先考虑可分性. 无需对 Ω 作更特殊的假设，就能证明如下一般结果.

4.3.3 定理　设 Ω 是第二可数的LCH，则空间 $C(\Omega)$ 依紧一致收敛拓扑是可分的.

证　取 Ω 中紧集的穷竭序列 $\{K_n\}$. 假定已证每个 $C(K_n)$ 是可分空间，取 $C(K_n)$ 的可数稠集 A_n. Ω 必为正规空间(用例3.1.18，LCH必为正则空间)，因此每个 $u \in A_n$ 都可以连续地扩张到 Ω 上(用定理3.1.16)，这就不妨认定 $A_n \subset C(\Omega)$(这是要点!)，因而 $A = \bigcup A_n$ 是 $C(\Omega)$ 的可数子集. 今证 A 在 $C(\Omega)$ 中稠密(因而 $C(\Omega)$ 是可分的). 取定 $u \in C(\Omega)$ 与 $\varepsilon \in (0,1)$，设 d 依式(1)和式(2)定义. 取定 $n \in \mathbf{N}$，使 $2^{-n} < \varepsilon/2$. 因 $u|K_n \in C(K_n)$，故有 $v \in A_n$，使得

$$\| u - v \|_n < \varepsilon/2, \quad \text{(记号依(1))}$$

从而

$$\| u - v \|_i < \varepsilon/2 \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

于是结合式(2)与式(4)有 $d(u,v) < \varepsilon$. 这表明 A 是稠集.

下面证 $C(K_n)$ 可分，这是定理证明的主要部分. 不妨设 Ω 本身是紧的，证 $C(\Omega)$ 可分. 可设 Ω 是紧度量空间(用推论4.1.20)，因而每个 $u \in C(\Omega)$ 在 Ω 上

一致连续(用定理4.1.13). 取定 Ω 的可数拓扑基 $\mathscr{B}$. 任给 $u \in C(\Omega)$ 与 $\varepsilon > 0$. 由一致连续性,必有有限开覆盖 $\beta = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\} \subset \mathscr{B}$, 使得 u 在每个 $B_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 内的振幅 $< \varepsilon/2$,即

$$\forall\, x, y \in B_i : |u(x) - u(y)| < \varepsilon/2.$$

取 Ω 上从属于 β 的单位分解 $\Phi_\beta = \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$ (依定理3.1.20),设定 Φ_β 的选择仅依赖于 β, 而与 u, ε 等因素无关. 取 $x_i \in B_i$ 及 $r_i \in \mathbf{Q}$, 使得

$$|u(x_i) - r_i| < \varepsilon/2 (1 \leqslant i \leqslant n).$$

令 $v = \sum r_i \varphi_i$, 则 $\forall\, x \in \Omega$, 有

$$|u(x) - v(x)| = \Big| \sum_i \varphi_i(x)[u(x) - r_i] \Big|$$

$$\leqslant \sum_i \varphi_i(x) |u(x) - r_i|.$$

若 $\varphi_i(x) \neq 0$, 则 $x \in \operatorname{supp} \varphi_i \subset B_i$, 于是

$$|u(x) - r_i| \leqslant |u(x) - u(x_i)| + |u(x_i) - r_i| < \varepsilon.$$

这就推出 $|u(x) - v(x)| < \varepsilon (\forall\, x \in \Omega)$, 从而 $\| u - v \| < \varepsilon$. 这就证明了形如 $v = \sum r_i \varphi_i$ 的函数在 $C(\Omega)$ 中稠密. 有限组 $\beta = \{B_i\} \subset \mathscr{B}, \{r_i\} \subset \mathbf{Q}$ 取自一可数集,而 $\{\varphi_i\}$ 仅决定于 β, 故如上的 v 只有可数多个(用定理1.1.8),这就证明了 $C(\Omega)$ 的可分性. □

定理4.3.3 是一个很一般的结果,它特别适用于 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是任一开集或 Ω 是紧度量空间(依推论 4.1.20)的情况. 定理 4.3.3 也推出空间 $\mathbf{R}^\omega$ 的可分性. 对于某些较特殊的 Ω,$C(\Omega)$ 的可分性当然可用更直观的方法来证明. 例如,对于 $\Omega = [a, b] \subset \mathbf{R}$, 由著名的Weierstrass 定理,每个 $u \in C(\Omega)$ 可用有理系数多项式一致逼近,而这就推出 $C(\Omega)$ 的可分性. 但除了假定 Ω 是第二可数的LCH 之外,不作任何其他附加假设就得出 $C(\Omega)$ 的可分性,则无疑是一个给人印象深刻的结果. 注意,在定理 4.3.3 的证明中,我们应用了定理 3.1.16,定理 3.1.18,定理 3.1.20及推论 4.1.20 等一系列深刻的拓扑定理,正是这些强有力的拓扑定理,使得我们能在 Ω 缺少具体结构的情况下完成 $C(\Omega)$ 的可数稠子集的构成. 这就凸显了抽象的拓扑学方法的强大力量.

关于多项式一致逼近的 Weierstrass 定理有多大的价值,是众所周知的. 在某种意义上,定理 4.3.3 可看作 Weierstrass 定理的一般化,其应用自然更加广泛,它常用作其他函数空间可分性证明的基础.

下面转向考虑 $C(\Omega)$ 中的紧集. 设 $A \subset C(\Omega)$. 由推论 4.1.11, A 是相对紧的 $\Leftrightarrow$ A 中任何序列有子列在 Ω 中紧一致收敛. 若 Ω 本身是紧的,则 A 相对紧 $\Leftrightarrow$ A 中任何序列有子列在 Ω 上一致收敛. 在一连续函数集中,确立一致收敛或紧一致收敛序列的存在性,对于许多问题是重要的,在一些存在性或可解性(例如微分方程解的存在性)证明中常常是关键的. 因此,涉及 $C(\Omega)$ 中紧集判断的定

理自然有重要价值. 以下结果是很著名的.

4.3.4 Arzela-Ascoli 定理 设 Ω 是紧度量空间，$A \subset C(\Omega)$，则 A 相对紧的充要条件是：

(i) A **一致有界**，即 $\sup\{|u(x)| : u \in A, x \in \Omega\} < \infty$；

(ii) A **等度连续**，即如下条件满足：

$$\begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, u \in A, \forall\, x, y \in \Omega, \\ d(x,y) < \delta \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon. \end{cases} \tag{13}$$

在给出证明之前，让我们解释一下条件(i)和条件(ii). 设 $C(\Omega)$ 中的度量 d 依式(11)，则条件(i)即

$$\sup_{u \in A} d(u,0) < \infty,$$

这相当于说 A 为有界集. 因 A 相对紧 $\Leftrightarrow A$ 全有界(依推论 4.1.11)，要求 A 有界是很自然的. 在 $\mathbf{R}^n$ 中，有界即为全有界. 在其他度量空间中，有界性通常还要加上一定附加条件才能推出全有界性；定理 4.3.4 中的等度连续性就正是这种附加条件. 条件(13)相当于说，每个 $u \in A$ 在 Ω 上一致连续，且描述 u 一致连续的 δ (参看 4.1 节式(1))与 $u \in A$ 无关. 这个条件当然是有点强的.

证 首先设 A 相对紧. 从前面的说明已看出 A 必一致有界. 今设 A 非等度连续，由此导出矛盾. 这是一个典型的收敛子列论证，关键步骤是适当地表述条件(13)的反面. 条件(13)不成立意味着存在 $\varepsilon > 0, u_n \in A, x_n, y_n \in \Omega (n \in \mathbf{N})$，使得

$$d(x_n, y_n) \to 0, \quad |u_n(x_n) - u_n(y_n)| \geqslant \varepsilon. \tag{14}$$

由 A 相对紧及 Ω 为紧空间，从 $\{u_n\}, \{x_n\}$ 本身及其任何子列均可选出收敛子列. 不失一般性，不妨就设 $u_n \to u$ (一致收敛)，$x_n \to x$；显然 $y_n \to x$. 于是由式(14)有

$$\begin{aligned} \varepsilon \leqslant & |u_n(x_n) - u(x_n)| + |u(x_n) - u(x)| \\ & + |u(x) - u(y_n)| + |u(y_n) - u_n(y_n)| \to 0, \end{aligned}$$

得出矛盾. 因此，A 必等度连续.

其次设条件(i)和(ii)满足，给定序列 $\{u_n\} \subset A$，今要从 $\{u_n\}$ 中选出一致收敛子列. 因 Ω 可分(用命题 4.1.19)，故 Ω 有一可数稠集 $\{x_k\}$. 由条件(i)，$\{u_n(x_1)\}$ 有界，因而有收敛子列，记作 $\{u_n^1(x_1)\}$. 同理，$\{u_n^1(x_2)\}$ 有收敛子列 $\{u_n^2(x_2)\}, \cdots$，一般地，$\{u_n^{k-1}(x_k)\}$ 有收敛子列 $\{u_n^k(x_k)\}, k = 1, 2, \cdots$. 令 $v_n = u_n^n$，则 $\{v_n\}$ 是 $\{u_n\}$ 的子列，对每个固定的 $k \in \mathbf{N}$，当 $n \to \infty$ 时 $\{v_n(x_k)\}$ 收敛. 今证 $\{v_n\}$ 一致收敛. 因 $C(\Omega)$ 完备，故只需证 $\{v_n\}$ 依度量 d 满足 Cauchy 条件(见 4.1 节式(13)). 任给 $\varepsilon > 0$，取定使条件(13)成立的 δ. 由 Ω 为紧度量空间推出，Ω 必为有限个球 $B_{\delta/2}(a_k)(1 \leqslant k \leqslant k_0)$ 覆盖. 因 $\{x_k\}$ 是 Ω 的稠子集，不妨设 $x_k \in$

$B_{\delta/2}(a_k)(1 \leqslant k \leqslant k_0)$. 取 $n_0 \in \mathbf{N}$, 使得

$$|v_m(x_k) - v_n(x_k)| < \varepsilon \quad (m,n \geqslant n_0, 1 \leqslant k \leqslant k_0). \tag{15}$$

注意, n_0 与 $k = 1,2,\cdots,k_0$ 无关(这是要点!). 任给 $x \in \Omega$, x 必属于某个 $B_{\delta/2}(a_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant k_0)$, 因而

$$d(x,x_k) \leqslant d(x,a_k) + d(a_k,x_k) < \delta.$$

于是, 当 $m,n \geqslant n_0$ 时有

$$\begin{aligned}|v_m(x) - v_n(x)| &\leqslant |v_m(x) - v_m(x_k)| + |v_m(x_k) - v_n(x_k)| \\ &\quad + |v_n(x_k) - v_n(x)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \qquad \text{(用式(13) 和式(15))}\end{aligned}$$

这表明

$$d(v_m,v_n) < 3\varepsilon \quad (\forall\, m,n \geqslant n_0),$$

即 $\{v_n\}$ 满足Cauchy 条件, 如所要证. □

如同在 3.2.11(ii)中一样, 上面证明中选出子列 $\{v_n\}$ 时用了对角线法, $\{v_n\}$ 正是"对角线序列". 注意, 运用对角线法时仅用到 A 的一致有界性, 而 A 的等度连续性则仅用于证明 $\{v_n\}$ 满足Cauchy 条件.

C. 一般情形

现在撤去第二可数性的假设, 仅假定 Ω 是LCH. 这样, 定义如式(1), (2)表示的度量已不可能, 但可将 $C(\Omega)$ 定义为一个一致空间. 这种一般情形在应用上不及前面考虑的特殊情形重要, 但作为解释一致空间概念的例子, 仍不失为有用. 因此下面作一简短的讨论.

以 $\mathscr{K}$ 记 Ω 的紧子集之全体. 任给 $K \in \mathscr{K}$, 定义

$$\begin{cases}\|u\|_K = \max\limits_{x \in K} |u(x)|, \\ d_K(u,v) = \|u - v\|_K \quad (u,v \in C(\Omega)).\end{cases} \tag{16}$$

直接看出 d_K 是 $C(\Omega)$ 上的一个伪度量. 由LCH 的性质知 $\mathscr{K}$ 覆盖 Ω (参看定理 3.2.13), 因此 $\{d_K : K \in \mathscr{K}\}$ 是 $C(\Omega)$ 上分离点的伪度量族, 它生成 $C(\Omega)$ 上的一个一致结构 $\mathscr{U}$. 令

$$V_{Kr} = \{(u,v) \in C(\Omega) \times C(\Omega) : d_K(u,v) < r\}.$$

任给 $K_i \in \mathscr{K}(1 \leqslant i \leqslant n)$, 有 $K \triangleq \bigcup K_i \in \mathscr{K}$, 且

$$d_K(u,v) < r \Leftrightarrow d_{K_i}(u,v) < r(1 \leqslant i \leqslant n),$$

因此 $V_{Kr} = \bigcap V_{K_i r}(r > 0)$. 这表明

$$\mathscr{V} \triangleq \{V_{Kr} : K \in \mathscr{K}, r > 0\} \tag{17}$$

是 $\mathscr{U}$ 的一个基, 因此 $\{d_K : K \in \mathscr{K}\}$ 是生成 $\mathscr{U}$ 的基本伪度量族.

给定 $C(\Omega)$ 中的网 $\{u_t\}$ 与 $u \in C(\Omega)$, 由 4.2 节式(14)有

$$u_t \to u \Leftrightarrow \forall\, K \in \mathscr{K}, \text{有 } d_K(u_t,u) \to 0$$

$$\Leftrightarrow \forall K \in \mathscr{K}, \text{在 } K \text{ 上 } u_t(x) \rightrightarrows u(x). \tag{18}$$

这就表明，$C(\Omega)$ 上的收敛仍然是在“每个紧集上一致收敛”，即紧一致收敛. 因而 $C(\Omega)$ 上的一致拓扑仍可称为紧一致收敛拓扑. 基于以上考虑，可将命题 4.3.1推广如下.

4.3.5 命题　依伪度量族 $\{d_K : K \in \mathscr{K}\}$ 生成的一致结构 $\mathscr{U}$，$C(\Omega)$ 是一个完备一致空间，其中的收敛即紧一致收敛.

证　只要证完备性. 设 $\{u_t\}$ 是 $C(\Omega)$ 中的Cauchy 网. 由4.2 节式(22b)，这意味着

$$\forall K \in \mathscr{K}, \text{有} \max_{x \in K} |u_s(x) - u_t(x)| \to 0. \tag{19}$$

因 $\mathscr{K}$ 覆盖 Ω，故由条件(19)推出，对每个 $x \in \Omega$，$\{u_t(x)\}$ 是$\mathbf{R}$ 上的Cauchy 网，因而收敛于某个 $u(x)$. 任给 $K \in \mathscr{K}$，由条件(19)有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_0, \forall s, t \geqslant t_0, \forall x \in K, \text{有 } |u_t(x) - u_s(x)| < \varepsilon;$$

这推出

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_0, \forall t \geqslant t_0, \forall x \in K, \text{有 } |u_t(x) - u(x)| < \varepsilon.$$

这表明在 K 上 $u_t(x) \rightrightarrows u(x)$，从而 $u|K \in C(K)$. 因 $\{K^\circ : K \in \mathscr{K}\}$ 覆盖 Ω (用定理3.2.13)，故 $u \in C(\Omega)$ (用拼接引理2.3.4). 因已指明 $\{u_t\}$ 在 Ω 上紧一致收敛，故 $C(\Omega)$ 的完备性得证. □

考虑一个最简单的例子以作说明.

4.3.6 例　设 Ω 是任给非空集，Ω 依离散拓扑显然是一个 LCH，因任何 $x : \Omega \to \mathbf{R}$ 均连续，故 $C(\Omega) = \mathbf{R}^\Omega$，$\Omega$ 的紧子集即有限子集，因此 Ω 上的紧一致收敛即点态收敛，而 $C(\Omega)$ 上的紧一致收敛拓扑即 $\mathbf{R}^\Omega$ 中的积拓扑(参考例 2.3.8 (ii)).

以 Σ 记 Ω 的有限子集之全体. 任给 $\sigma = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\} \in \Sigma$，依式(16)定义的伪度量 d_σ(以 σ 代 K) 可表为

$$d_\sigma(x, y) = \max_i |x(\omega_i) - y(\omega_i)|. \tag{20}$$

以 $\{d_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ 为基本伪度量族，在 $\mathbf{R}^\Omega$ 上生成一个一致结构$\mathscr{U}$. 注意，式(20)与 4.2 节式(19)一致. 将这里的结果与例 4.2.10(ii)对照看出，$\mathscr{U}$ 正是 $\mathbf{R}^\Omega$ 上的积一致结构.

D. 紧开拓扑

上段所考虑的紧一致收敛拓扑还可作进一步的推广. 以下设 X 与 Y 是两个拓扑空间，$F = C(X, Y)$，以 $\mathscr{K}$ 记 X 中紧集之全体，令

$$\begin{cases} \mathscr{B} = \{V_{KG} : K \in \mathscr{K}, G \in \tau_Y\}, \\ V_{KG} = \{f \in F : f(K) \subset G\}. \end{cases} \tag{21}$$

$\forall f \in F$，取 $K = \{x\}$，$G = Y$ 得 $f \in V_{KG}$. 可见 $\mathscr{B}^\# = F$.

4.3.7 定义　设$\mathscr{B}$依式(21),则以$\mathscr{B}$为拓扑子基在$F=C(X,Y)$上生成一拓扑τ,称为**紧开拓扑**(对照例2.3.8(iii)中的点开拓扑).

以上定义既未要求X为LCH,亦未要求Y为度量空间.不过,如果对X与Y加以适当限制,就能得出关于紧开拓扑的较强的结论.

4.3.8 命题　设Y是度量空间,τ是$F=C(X,Y)$上的紧开拓扑.

(i) 设$\{f_t\}\subset F$是一个网,$f\in F$,则依紧开拓扑$f_t\to f\Leftrightarrow$在每个$K\in\mathscr{K}$上$f_t(x)\rightrightarrows f(x)$,即

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\, t_0,\forall\, t\geqslant t_0,\forall\, x\in K: d(f_t(x),f(x))<\varepsilon. \tag{22}$$

(ii) F由伪度量族

$$\begin{cases}D=\{d_K: K\in\mathscr{K}\},\\ d_K(f,g)=\sup\limits_{x\in K} d(f(x),g(x)) \quad (f,g\in F)\end{cases} \tag{23}$$

定义一个一致结构,其一致拓扑就是紧开拓扑.

(iii) 若X是LCH且Y完备,则F是完备一致空间.

证　(i) 设$f_t\to f,K\in\mathscr{K},\varepsilon>0$. 因$f(K)$是$Y$中的紧集,因而全有界,故有有限个点$y_i\in Y$,使$f(K)\subset\bigcup B_\varepsilon(y_i)$. 令$K_i=K\cap f^{-1}\overline{B}_\varepsilon(y_i)$,则

$$K_i\in\mathscr{K},K=\bigcup K_i,\quad f(K_i)\subset\overline{B}_\varepsilon(y_i)\subset B_{2\varepsilon}(y_i)\triangleq G_i,$$

从而$V\triangleq\bigcap V_{K_iG_i}$是$f$的一个邻域.取$t_0$,使$t\geqslant t_0$时$f_t\in V$. $\forall\, x\in K$,取定i使$x\in K_i$,则当$t\geqslant t_0$时有$f_t(K_i)\subset G_i$,从而

$$d(f_t(x),f(x))\leqslant d(f_t(x),y_i)+d(f(x),y_i)<3\varepsilon,$$

可见条件(22)满足(以3ε代ε).

反之,设$\forall\, K\in\mathscr{K}$,条件(22)满足.取定$K\in\mathscr{K},G\in\tau_Y$,设$f(K)\subset G$. 因$f(K)$紧,故有$\varepsilon>0$,使得(参考习题246)

$$V_\varepsilon\triangleq\{y\in Y: d(y,f(K))<\varepsilon\}\subset G.$$

取t_0,使得$\forall\, t\geqslant t_0,\forall\, x\in K$,有$d(f_t(x),f(x))<\varepsilon$. 当$t\geqslant t_0,x\in K$时有$f_t(x)\in V_\varepsilon$,从而$f_t\in V_{KG}$. 这表明$f_t\to f$.

(ii) 直接看出$d_K(K\in\mathscr{K})$是F上的伪度量.因$\{\{x\}: x\in X\}\subset\mathscr{K}$,故$D=\{d_K: K\in\mathscr{K}\}$分离$F$中的点,因而$D$生成$F$上一个一致结构.因依一致拓扑的收敛显然也是"紧一致收敛",故一致拓扑重合于紧开拓扑.

(iii) 设X是LCH,Y是完备度量空间,$\{f_t\}\subset F$是一Cauchy网,这意味着$\forall\, K\in\mathscr{K}$,有$d_K(f_t,f_s)\to 0$. $\forall\, x\in X$,$\{f_t(x)\}$是Y中的Cauchy网,因而$f_t(x)$逐点收敛于某个函数$f(x)$. $\forall\, K\in\mathscr{K}$,由条件$d_K(f_t,f_s)\to 0$推出在$K$上$f_t(x)\rightrightarrows f(x)$,因而$f|K\in C(K,Y)$. 由$X$为LCH得出$\{K^\circ: K\in\mathscr{K}\}$覆盖$X$,故$f\in C(X,Y)$(用引理2.3.4).因此在$F$中$f_t\to f$,$F$的完备性得证. □

鉴于命题4.3.8(i)的结论,当Y是度量空间时,$C(X,Y)$中的紧开拓扑也称

为紧一致收敛拓扑. 若 X 本身是紧空间, $C(X,Y)$ 中的紧开拓扑就是一致收敛拓扑, 这意味着在 $C(X,Y)$ 中

$$f_t \to f \Leftrightarrow f_t(x) \rightrightarrows f(x) \quad (x \in X).$$

此时 $C(X,Y)$ 实际上是一个度量空间, 其度量定义为

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x)) \quad (f,g \in C(X,Y)).$$

习　题

221. 设 d 与 d_1 是 X 上的两个度量. 若有 $\alpha,\beta > 0$, 使得 $\alpha d(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant \beta d(x,y)(x,y \in X)$, 则 d 与 d_1 一致等价.

222. 设 d 与 d_1 是 X 上的两个度量, 则 d 与 d_1 拓扑等价 $\Leftrightarrow \forall\, x \in X, \forall\, r > 0, d$- 球 $B_r(x)$ 包含一个 d_1- 球 $B_\rho^1(x)$, $B_r^1(x)$ 包含某个 $B_s(x)(\rho,s > 0)$.

223. 设 $\varphi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_+$ 有以下性质: (i) $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$; (ii) $x \leqslant y \Rightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(y)$; (iii) $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; (iv) $x^{(k)} \to 0 \Leftrightarrow \varphi(x^{(k)}) \to 0 (k \to \infty)$. 设 d_i 是 $X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 上的度量, $X = \prod X_i$. 任给 $x = (x_i), y = (y_i) \in X$, 定义 $d(x,y) = \varphi(d_1(x_1,y_1),\cdots,d_n(x_n,y_n))$, 则 d 是 X 上的一个度量, 它一致等价于由 4.1 节式(11)定义的度量.

224. 设 d_i 是 $X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 上的度量, $X = \prod X_i, 1 \leqslant p < \infty$. 任给 $x = (x_i), y = (y_i) \in X$, 定义 $d(x,y) = \left\{\sum [d_i(x_i,y_i)]^p\right\}^{1/p}$, 则 d 是 X 上的一个度量, 它在一致等价的意义上与 p 无关.

225. 设 (X,d) 是度量空间, 在 $X \times X$ 中采用度量 $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d(x_1,y_1) + d(x_2,y_2)$, 则 $d: X \times X \to \mathbf{R}$ 一致连续.

226. $\{x_n\} \subset X$ 是Cauchy 序列 $\Leftrightarrow \lim\limits_n \operatorname{diam}\{x_k : k \geqslant n\} = 0$.

227. 设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是 X 中的Cauchy 序列, 则 $\{d(x_n,y_n)\}$ 收敛.

228. 设 Ω 是任一非空集, $B(\Omega)$ 是 Ω 上的有界实函数之全体, 则 $B(\Omega)$ 依度量 $d(x,y) = \sup\limits_{\omega\in\Omega} |x(\omega) - y(\omega)|$ 是一个完备度量空间.

229. 设 Ω 是任一非空集, X 是一完备度量空间, Y 是从 Ω 到 X 的有界映射之全体, 则 Y 依度量 $d(y,z) = \sup\limits_{\omega\in\Omega} d(y(\omega),z(\omega))$ 是一个完备度量空间.

230. 设 $B(\Omega)$ 依题228, $X = \{x \in B(\Omega) : x(\omega) \geqslant 0 (\forall\, \omega \in \Omega)\}$, 则 X 依 $B(\Omega)$ 中的度量是一完备度量空间.

231. 设 $X = \mathbf{N}^{\mathbf{N}}, \forall\, x,y \in X$, 当 $x \neq y$ 时令 $d(x,y) = \max\{n^{-1} : x_n \neq y_n\}, d(x,x) = 0$, 则 (X,d) 是一完备度量空间.

232. 设 Ω 是任一非空集, X 是一完备度量空间, $\{x_n\} \subset X^\Omega$. 若存在 $x \in X^\Omega$, 使得 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbf{N}, \forall\, n \geqslant n_0, \forall\, \omega \in \Omega$, 有 $d(x_n(\omega),x(\omega)) < \varepsilon$, 则说 $\{x_n\}$ 一致收敛. $\{x_n\}$ 一致收敛的充要条件是, 当 $m,n \to \infty$ 时对 $\omega \in \Omega$ 有 $d(x_m(\omega),x_n(\omega)) \rightrightarrows 0$.

233. 设 Ω 是一拓扑空间, X 是一度量空间, $\{x_n\} \subset C(\Omega,X)$ 一致收敛于 x (依题232), 则 $x \in C(\Omega,X)$.

234. 设 V 是完备度量空间 (X,d) 的一开子集, $\varnothing \neq V \neq X$, 则 V 依度量 $d_1(x,y) =$

$d(x,y)+\left|\frac{1}{d(x,V^c)}-\frac{1}{d(y,V^c)}\right|$ 完备，且在 V 上度量 d 与 d_1 等价.

235. 度量空间 X 全有界 $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0, X$ 是有限个直径 $<\varepsilon$ 的集之并.

236. 度量空间 X 全有界 $\Leftrightarrow$ 对任何无限集 $A\subset X$，有 $\inf\limits_{x,y\in A,x\neq y} d(x,y)=0$.

237. 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的Cauchy序列，则 $\{x_n\}$ 作为 X 的子集是全有界的.

238. 度量空间 X 完备 $\Leftrightarrow X$ 中任何全有界序列有收敛子列.

239. 度量空间 X 完备 $\Leftrightarrow X$ 中任何全有界无限集有聚点.

240. 设 $\mathscr{A}$ 是紧度量空间 X 的开覆盖，则 $\exists\,\lambda>0, \forall\, B\subset X$，当 $\operatorname{diam}B<\lambda$ 时 B 含于某个 $A\in\mathscr{A}$.

241. 设 X 是紧度量空间，U 是对角线 $\Delta\subset X\times X$ 的开邻域，则有 $\varepsilon>0$，使 $V_{d\varepsilon}\subset U, V_{d\varepsilon}$ 依4.2节式(13).

242. 设 $A,B\subset X$ 是非空集，A 为紧集，则有 $a\in A$ 使 $d(A,B)=d(a,B)$.

243. 设 $A,B\subset X$ 是非空闭集，A 为紧集，则 $d(A,B)=0\Leftrightarrow A\cap B\neq\varnothing$.

244. 设 $A,B\subset \mathbf{R}^n$ 是非空闭集，A 有界，则有 $a\in A,b\in B$，使 $d(A,B)=d(a,b)$. 当 A 与 B 均无界时结论是否成立？

245. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是非空闭集，$x\in\mathbf{R}^n$，则有 $a\in A$，使 $d(x,A)=d(x,a)$.

246. 设 $A\subset U\subset X, A$ 为紧集，U 为开集，则有 $\varepsilon>0$，使得 $\{x: d(x,A)<\varepsilon\}\subset U$.

247. 设 d 与 d_1 是 X 上的两个度量，(X,d) 是紧的，$d_1\leqslant\beta\, d,\beta$ 是正常数，则 d 与 d_1 一致等价.

248. 设 X 是紧度量空间，$F_i\subset X(1\leqslant i\leqslant n)$ 是非空闭集，则有 $\varepsilon>0$，使当 $A\subset X$，$\operatorname{diam}A<\varepsilon$ 且 $A\cap F_{i_k}\neq\varnothing(1\leqslant k\leqslant m)$ 时 $\bigcap F_{i_k}\neq\varnothing$.

249. 设 X 是度量空间，则 X 是紧的 $\Leftrightarrow$ 每个 $f\in C(X)$ 有界.

250. 设 X 是紧拓扑空间，Y 是度量空间，$F\in C(X,Y)$，则有 $\bar{x},\bar{y}\in X$，使得 $d(F\bar{x},F\bar{y})=\operatorname{diam}FX$.

251. 设 X 是完备度量空间，$F:X\to X$ 满足 $d(Fx,Fy)\leqslant rd(x,y), r\in(0,1)$ 为常数，则 F 有唯一不动点 x.

252. 设 X 是紧度量空间，$F:X\to X$，当 $x\neq y$ 时 $d(Fx,Fy)<d(x,y)$，则 F 有唯一不动点.

253. $A\subset X$ 是疏集 $\Leftrightarrow X$ 的每个非空开子集有不交于 A 的非空开子集.

254. $A\subset X$ 是闭疏集 $\Leftrightarrow$ 存在开集 $V\subset X$ 使 $A=\partial V$.

255. 对一拓扑空间 X 以下条件互相等价：(i) X 中可数个稠开集之交是稠集；(ii) X 中的第一纲集无内点；(iii) X 的非空开子集是第二纲集.

256. $\mathbf{R}^2$ 不是可数条直线的并.

257. 设 X 是一可数紧 T_2 空间，则 X 可度量化 $\Leftrightarrow X$ 是第二可数的.

258. 积拓扑空间 $X=\prod X_i$ 可度量化 $\Leftrightarrow$ 每个 X_i 可度量化，且除至多可数多个例外 X_i 是单点空间.

259. 可分度量空间必有全有界的拓扑等价度量.

260. 设 $(X,\mathscr{U})$ 是紧一致空间，则 $\mathscr{U}=\mathscr{N}_\Delta, \Delta\subset X\times X$ 是对角线.

第5章　基本群与同调群

在考虑过度量空间与一致空间这两类较特殊的空间之后，让我们再回到一般的拓扑空间. 在第3章中我们考察了拓扑空间的分离性、紧性与连通性，这些无疑是最基本的拓扑性质. 但很容易看出，仅用这些性质还远不足以确定两个拓扑空间是否同胚. 例如，球面 S^2 与环面 T^2 都具有我们考虑过的所有拓扑性质(如可分性、正规性、紧性、路连通性等)，但即使从直观上看来，也能断定二者的拓扑结构必有本质的差别，因而一定有某种比紧性、连通性等更隐蔽的拓扑性质未被发现，依据这种性质，S^2 与 T^2 是应能被区分的. 这就表明，在第3章中所考察的那些主要具有**集论风格**的拓扑性质，还过于一般化；对于拓扑性质的研究，不应止于对这些性质的考察.

这又引出第二个问题：研究拓扑性质的方法需要有重大改进. 首先，既然现在我们更关注那些很隐蔽的拓扑性质，自然应将研究对象从同胚不变性质过渡到同伦不变性质，后者是更特殊的. 其次，迄今所用的方法主要带有集论特征，用于判定两个拓扑空间是否同伦等价是难以奏效的. 一个完全新的思路是：如果能找到一种规则，使每个拓扑空间 X 对应于一个代数系统(例如群) $G(X)$，且当 $X \simeq Y$ 时 $G(X)$ 同构于 $G(Y)$，那么，一旦发现 $G(X)$ 与 $G(Y)$ 不同构，则可立即断定 X 与 Y 不同伦等价，因而它们必有某些相异的同伦不变性质. 这就将两个空间拓扑结构的比较，归结为它们所对应的代数系统的比较. 或者说，将一个拓扑问题转化为一个代数问题. 这一思路系统地展开的结果就是今天所称的代数拓扑，它肇端于20世纪初，而至20世纪50年代已大体上趋于成熟. 代数拓扑涉及高度精致与复杂的方法，并不是一个初级课程所容易介绍的. 本章只给出一些最基本的概念与结果，但即使这些初步的内容，也能在一定程度上体现出代数拓扑的基本精神，而这也就达到了本书的目的.

5.1　基　本　群

已提到的 S^2 与 T^2 的拓扑差别，在不严格的形式下可用如下的简单方法发现：球面 S^2 上任一闭路(即两端重合的路)均可经连续变形缩为一点，而环面 T^2 则无此性质. 这就提示出一个想法：若用闭路的某种同伦等价类构成一个群，则

可能用这种群来揭示空间的某些拓扑性质. 这一想法导致基本群概念. 基本群是由代数拓扑的奠基者Poincaré于19世纪末引进的.

以下设 X,Y 等是给定的路连通空间, $J=[0,1]$. 路连通假设并非处处必要,但我们宁可用一个较强的假设来消除一些琐碎的讨论.

A. 同伦

鉴于同伦概念在本节中起核心作用,今在2.4E的基础上作某些更细致的讨论.

给定 $f,g\in C(X,Y)$ 与 $A\subset X$. 若存在同伦 $H: f\simeq g$, 使得 $H_t|A=f|A=g|A$, 即

$$H(t,x)=f(x)=g(x)\quad((t,x)\in J\times A),$$

则说 f 与 g **相对于 A 同伦**. 将 $\simeq$ 改换成"相对于 A 同伦"之后,命题2.4.16仍保持成立,即有以下命题.

5.1.1 命题　(i) 设 $A\subset X$, 则"相对于 A 同伦"是 $C(X,Y)$ 上的一个等价关系.

(ii) 设 $f,g\in C(X,Y)$ 相对于 A 同伦, $\varphi,\psi\in C(Y,Z)$ 相对于 B 同伦, $f(A)\subset B$, 则 φf 与 ψg 相对于 A 同伦.

若取 $A,B=\varnothing$, 则命题5.1.1与命题2.4.16一致.

其次考虑空间的同伦等价. 在简单情况下,同伦等价可借助于某个形变收缩来实现.

5.1.2 定义　设 $A\subset X, r\in C(X,A), i: A\subset X$ (包含映射).

(i) 若 $r|A=1_A$, 即 r 保持 A 中的点不动,则称 r 为从 X 到 A 的一个**收缩**或**收缩映射**.

(ii) 若 r 是一个收缩, $H: 1_X\simeq ir$, 即 $H\in C(J\times X,X)$ 满足

$$\begin{cases}H(0,x)=x, H(1,x)\in A(x\in X),\\ H(1,a)=a(a\in A),\end{cases}\tag{1}$$

则称 H 为从 X 到 A 的一个**形变收缩**.

(iii) 若 r 是一个收缩, $H: 1_X\simeq ir$ 是相对于 A 的同伦,则称 H 为从 X 到 A 的一个**强形变收缩**.

当情况(i)~(iii)的条件被某个 r 及 H 满足时,分别称 A 为 X 的**收缩核**、**形变收缩核**与**强形变收缩核**. 在定义5.1.2(ii)的情况下,结合 $1_X\simeq ir$ 与 $ri=1_A$ 得出 $r: X\simeq A$ (依定义定义2.4.15),即 X 与其形变收缩核同伦等价. 若 X 可形变收缩到一点,则 X 就是可缩空间(参看例2.4.18).

在简单情况下,依据直接的几何考虑可构成所需的形变收缩. 下面是一些常用的例子.

5.1.3 例　(i) 设 $X\subset\mathbf{R}^n$ 是一**星形集**,这意味着存在一点 $x_0\in X$, 从 x_0 到

任何 $x \in X$ 的线段含于 X. 则

$$H(t,x) = tx_0 + (1-t)x \quad ((t,x) \in J \times X) \tag{2}$$

是从 X 到点 x_0 的强形变收缩. 特别, 以上结论适合于 X 是凸集的情况.

(ii) 设 $A \subset X \subset \mathbf{R}^n$, $r \in C(X,A)$ 是沿直线的收缩, 即连接 x 与 $r(x)(x \in X)$ 的线段全在 X 内, 则

$$H(t,x) = tr(x) + (1-t)x \quad ((t,x) \in J \times X) \tag{3}$$

是从 X 到 A 的强形变收缩. 式(3)显然以式(2)为其特例. 其次, 若取 $X = \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$, $A = S^{n-1}$, $r(x) = x/|x|$, 则

$$H(t,x) = |x|^{-1}tx + (1-t)x \quad ((t,x) \in J \times X) \tag{3$'$}$$

是从 $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ 到 S^{n-1} 的强形变收缩.

(iii) 设 $X = S^n \backslash \{p\}$, p 是 S^n 上任一点. 取同胚 $h: X \cong \mathbf{R}^n$ (参考例3.2.18), 令

$$H(t,x) = h^{-1}((1-t)h(x)) \quad ((t,x) \in J \times X),$$

则 H 是从 $S^n \backslash \{p\}$ 到点 $h^{-1}(0)$ 的强形变收缩.

(iv) 设 $f \in C(X,Y)$, $y_0 \in Y$ 是 Y 的形变收缩核, 则 f 是零伦的(定义依 2.4.15(i)). 事实上, 设 H 是 Y 到 y_0 的形变收缩, 则

$$G(t,x) = H(t,f(x)) \quad ((t,x) \in J \times X)$$

是 f 与 $c(x) \equiv y_0$ 之间的同伦. 以上事实结合(iii)得出: 若 $f \in C(X,S^n)$, $f(X) \neq S^n$, 则 f 是零伦的. 这一结论后面将要用到.

在例5.1.3中借助于适当的形变收缩得出: 星形集与除去一点的球面是可缩空间, 而 $\mathbf{R}^n \backslash \{0\} \simeq S^{n-1}$. 这些结论是重要而常用的. 在类似情况下, 简单的同伦等价结论都直接由几何观察得出, 而不必确切地写出所用的同伦映射. 例如, 由直接观察看出, 从0到9这十个数字作为1维图形可分三个同伦等价类:

$$\{0,4,6,9\}, \{1,2,3,5,7\}, \{8\}.$$

这一分类比依同胚等价分类要粗, $\{0,4,6,9\}$ 就可分三个同胚等价类: $\{0\}$, $\{4\}$, $\{6,9\}$.

B. 基本群的定义

在3.3节中, 我们已将 X 中连接点 x_0 与 x_1 的路定义为一个连续映射 $\varphi \in C(J,X)$, $\varphi(i) = x_i (i = 0,1)$. 在那里, 起点与终点的区别并不重要, 而现在则要强调二者的区别. 设 α, β 是 X 中的路. 若 α 与 β 相对于 $\{0,1\}$ 同伦, 则说 α 与 β 等价, 记作 $\alpha \sim \beta$. $\alpha \sim \beta$ 意味着存在 $H \in C(J \times J, X)$, 使得

$$\begin{cases} H(0,s) = \alpha(s), H(1,s) = \beta(s), & s \in J; \\ H(t,i) = \alpha(i) = \beta(i), & t \in J, i = 0,1. \end{cases} \tag{4}$$

满足条件(4)的 H 称为从 α 到 β 的一个**定端同伦**. 直观上, H 可看作从 α 到 β 的一个连续变形, 在变形过程中端点始终保持不动(参看图5-1). 注意, 对于 $\alpha \sim \beta$,

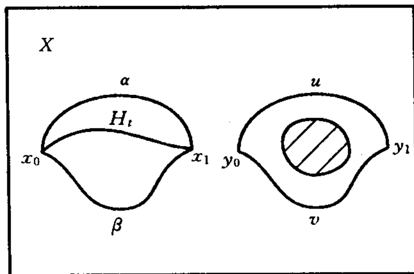


图 5-1

条件 $\alpha(i)=\beta(i)(i=0,1)$ 是必要而非充分的：在图5-1 中，路 u 与 v 共起点与终点，但并不等价，因"连续变形"被一个"洞"阻障了. 这一事实表明，X 中路的 $\sim$ 关系可用来反映 X 的拓扑性质. 直接由命题 5.1.1(i)得出，$\sim$ 是 $C(J,X)$ 上的一个等价关系，以 $[\alpha]$ 记路 α 所属的 $\sim$ 等价类或同伦类，称这种 $[\alpha]$ 为一个**路类**；当 $\alpha(0)=\alpha(1)$ 时称 α 为一个**闭路**，而称 $[\alpha]$ 为 α 所属的**闭路类**.

对于构建基本群，一个关键步骤是定义路的乘积，它就是首尾相接的路的连接. 准确地说，设 $\alpha,\beta\in C(J,X)$，$\alpha(1)=\beta(0)$，则定义 α 与 β 的"积" $\alpha*\beta$ 为

$$(\alpha*\beta)(s)=\begin{cases}\alpha(2s), & 0\leqslant s\leqslant 1/2,\\ \beta(2s-1), & 1/2\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}\tag{5}$$

注意，$\alpha*\beta: J\to X$ 在 J 的闭子集$[0,1/2]$与$[1/2,1]$上连续，在 $s=1/2$ 有唯一确定的值，因而必在 J 上连续(用拼接引理2.3.4，本节所构成的其他映射的连续性检验均仿此，今后将不再作解释)，故 $\alpha*\beta$ 是 X 上一条从 $\alpha(0)$ 到 $\beta(1)$ 的路. 依式(5)定义的路的乘法直观意义清楚，但其代数性质却不能令人满意：它甚至不满足结合律. 因此，我们转向等价类的乘积，定义

$$[\alpha][\beta]=[\alpha*\beta],\tag{6}$$

假定其中 $\alpha,\beta\in C(J,X)$，$\alpha(1)=\beta(0)$. 如下面的引理将表明的，这样的乘积已具有较好的性质.

5.1.4 引理　由式(6)所定义的乘积 $[\alpha][\beta]$ 不依赖于 α,β 的选择. 若 $\alpha,\beta,\gamma\in C(J,X)$，$\alpha(0)=x_0$，$\alpha(1)=\beta(0)=x_1$，$\beta(1)=\gamma(0)$，$c_{x_0}(s)\equiv x_0$，$\bar{\alpha}(s)=\alpha(1-s)(s\in J)$，则

$$([\alpha][\beta])[\gamma]=[\alpha]([\beta][\gamma]),\tag{7}$$

$$[c_{x_0}][\alpha]=[\alpha]=[\alpha][c_{x_1}],\tag{8}$$

$$[\alpha][\bar{\alpha}]=[c_{x_0}],\quad [\bar{\alpha}][\alpha]=[c_{x_1}].\tag{9}$$

引理中的 c_{x_0} 称为 x_0 处的**常路**，而 $\bar{\alpha}$ 称为路 α 的**逆路**. 这些术语与记号在下面保持有效.

证　(i) 设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，今证 $\alpha*\beta\sim\alpha'*\beta'$ (这推出式(6)右端不依赖于 α,β 的选择). 取定端同伦 $F:\alpha\simeq\alpha'$ 与 $G:\beta\simeq\beta'$，定义

$$H(t,s)=\begin{cases}F(2t,s), & (t,s)\in[0,1/2]\times J,\\ G(2t-1,s), & (t,s)\in[1/2,1]\times J,\end{cases}$$

则易直接看出 $H:\alpha*\beta\simeq\alpha'*\beta'$ 是定端同伦.

(ii) 等式(7)相当于 $(\alpha*\beta)*\gamma \sim \alpha*(\beta*\gamma)$. 为求出实现这一等价的定端同伦 $H(t,s)$，首先注意到 $H(t,s)$ 应满足:

$$H(0,s)=\begin{cases}\alpha(4s), & 0\leqslant s\leqslant 1/4,\\ \beta(4s-1), & 1/4\leqslant s\leqslant 1/2,\\ \gamma(2s-1), & 1/2\leqslant s\leqslant 1;\end{cases}$$

$$H(1,s)=\begin{cases}\alpha(2s), & 0\leqslant s\leqslant 1/2,\\ \beta(4s-2), & 1/2\leqslant s\leqslant 3/4,\\ \gamma(4s-3), & 3/4\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

以上两式右端分别为 $((\alpha*\beta)*\gamma)(s)$ 与 $(\alpha*(\beta*\gamma))(s)$. 于是作收缩 $r: J\times J\to\{0\}\times J=J$，使得图5-2中的梯形 A,B,C 分别沿直线收缩到 $J\times J$ 的左侧边. 例如设 $(t,s)\in A$，(t,s) 沿直线收缩到 s_1，则 s_1 应满足

$$\frac{s_1}{1/4}=\frac{s}{(1+t)/4},$$

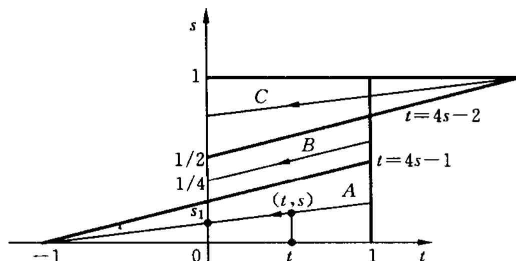


图 5-2

由此解出 $s_1=s/(1+t)$，因而 $r(t,s)=s/(1+t)$. 类似地可对 B,C 求出 $r(t,s)$. 令 $\varphi=(\alpha*\beta)*\gamma, H(t,s)=\varphi(r(t,s))$，则

$$H(t,s)=\begin{cases}\alpha\left(\dfrac{4s}{1+t}\right), & 0\leqslant s\leqslant \dfrac{1+t}{4},\\ \beta(4s-t-1), & \dfrac{1+t}{4}\leqslant s\leqslant \dfrac{2+t}{4},\\ \gamma\left(\dfrac{4s-t-2}{2-t}\right), & \dfrac{2+t}{4}\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

由 r 的构成直接得出

$$H(0,s)=((\alpha*\beta)*\gamma)(s);$$
$$H(1,s)=(\alpha*(\beta*\gamma))(s);$$
$$H(t,0)=\alpha(0), H(t,1)=\gamma(1).$$

可见 $H(t,s)$ 正好是所求的定端同伦.

上述同伦的构建虽颇繁琐，但所循思路还是清楚的. 下面用到的同伦都循类

似的思路作出，将不再写出其细节.

(iii) 为证式(8)，不妨只证 $c_{x_0} * \alpha \sim \alpha$，为此可用如下同伦：

$$H(t,s)=\begin{cases}\alpha\left(\dfrac{2s}{1+t}\right), & 0\leqslant s\leqslant \dfrac{1+t}{2},\\ x_0, & \dfrac{1+t}{2}\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

(iv) 为证式(9)，不妨只证 $\alpha * \bar{\alpha} \sim c_{x_0}$，为此可用如下同伦：

$$H(t,s)=\begin{cases}\alpha(2ts), & 0\leqslant s\leqslant 1/2,\\ \alpha(2t(1-s)), & 1/2\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

□

已证的式(7)～(9)分别意味着：路类的乘法满足结合律；$[c_{x_0}]$ 起乘法单位元的作用；$[\alpha]$ 与 $[\bar{\alpha}]$ 有某种互逆关系. 这就接近于得出一种群运算. 唯一的缺陷是 $[\alpha]$ 与 $[\beta]$ 未必总能相乘. 但只要将路的端点固定在一定点，这一缺陷就可以消除.

5.1.5 定理　设 $x_0\in X$，$\Omega(X,x_0)$ 是 X 中以 x_0 为起讫点的闭路之全体，$\pi_1(X,x_0)$ 是 $\Omega(X,x_0)$ 的～等价类之全体，则 $\pi_1(X,x_0)$ 依乘法运算(6)是一个群，其单位元为 $[c_{x_0}]$，且

$$[\alpha]^{-1}=[\bar{\alpha}]\quad([\alpha]\in\pi_1(X,x_0)).\tag{10}$$

若 ρ 是 X 中从 x_0 到 x_1 的路，则

$$\rho_{\#}:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1),[\alpha]\to[\bar{\rho}][\alpha][\rho]\tag{11}$$

是一群同构.

证　由引理5.1.4，$\forall\,[\alpha],[\beta]\in\pi_1(X,x_0)$，$[\alpha][\beta]$ 依式(6)总可定义，且与 α,β 的选择无关. 由式(7)～(9)依次推出 $\pi_1(X,x_0)$ 中的乘法是结合的，$[c_{x_0}]$ 是单位元，每个 $[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$ 可逆且式(10)成立. 因此 $\pi_1(X,x_0)$ 依乘法运算(6)是一个群.

任给 $[\alpha],[\beta]\in\pi_1(X,x_0)$，依式(11)有

$$\begin{aligned}\rho_{\#}([\alpha][\beta])&=[\bar{\rho}][\alpha][\beta][\rho]\\&=([\bar{\rho}][\alpha][\rho])([\bar{\rho}][\beta][\rho])\quad(\text{用式(7)}\sim\text{式(9)})\\&=(\rho_{\#}[\alpha])(\rho_{\#}[\beta]),\quad(\text{用式(11)})\end{aligned}$$

可见 $\rho_{\#}$ 是同态. 直接看出 $\rho_{\#}\bar{\rho}_{\#}$ 与 $\bar{\rho}_{\#}\rho_{\#}$ 均为单位映射，因此 $\rho_{\#}$ 是一个双射，从而是一同构. □

由定理 5.1.5 所确立的群 $\pi_1(X,x_0)$ 称为 X 的以 x_0 为**基点的基本群**. 同构(11)表明，不同基点的基本群并无实质区别. 因此，若仅着眼于代数结构，则可忽略基点的差别，就将 $\pi_1(X,x_0)$ 简写作 $\pi_1(X)$. 但是对于与映射有关的问题(下面就要考虑这种问题)，基点是不可忽略的. 问题在于，同构(11)就与基点有关.

C. 诱导同态

我们预期的结论是：互相同伦等价的拓扑空间有同构的基本群，即

$$X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y), \tag{12}$$

其中$\cong$表群同构（本章均如此）. 得出这一结论的方法是标准的，不妨现在就勾画一个大致思路：任给 $f \in C(X,Y)$，可依自然的方式构成同态

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)) \quad (x_0 \in X);$$

对应 $f \to f_*$ 具有以下性质：$(gf)_* = g_* f_*$；$(1_X)_*$ 为单位映射；$f \simeq g \Rightarrow g_* = hf_*$，$h$ 是某个群同构. 一旦确立了上述性质，推出结论(12)就变成很容易的事. 以上思路在或多或少类似的形式下普遍出现于代数拓扑的其他分支，因而特别值得加以强调.

5.1.6 命题　设 $f \in C(X,Y)$，$x_0 \in X$，$f(x_0) = y_0$，则映射

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to (Y, y_0), \quad [\alpha] \to [f \circ \alpha] \tag{13}$$

是一同态，它有以下性质.

(i) 若 $g \in C(Y,Z)$，$g(y_0) = z_0$，则

$$(gf)_* = g_* f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, z_0).$$

(ii) $(1_X)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ 是单位映射.

(iii) 若 $f \simeq g$，$g(x_0) = y_1$，则有 Y 中连接 y_0 与 y_1 的路 ρ，使得

$$g_* = \rho_\# f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1).$$

证　任给 $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$，从 $\alpha \sim \alpha'$ 推出 $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$（用命题5.1.1(ii)），这表明 $f_*[\alpha] = [f \circ \alpha]$ 与 α 的选择无关. 若 $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$，则

$$\begin{aligned} f_*([\alpha][\beta]) &= [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] \\ &= [f \circ \alpha][f \circ \beta] = (f_*[\alpha])(f_*[\beta]), \end{aligned}$$

这表明 f_* 是同态. 下面验证结论(i)～(iii).

(i) 任给 $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$，有

$$\begin{aligned} (gf)_*[\alpha] &= [g \circ f \circ \alpha] = g_*([f \circ \alpha]) \\ &= g_*(f_*[\alpha]) = (g_* f_*)[\alpha], \end{aligned}$$

这表明 $(gf)_* = g_* f_*$.

(ii)是显然的.

(iii) 取同伦 $H : f \simeq g$，令 $\rho(t) = H(t, x_0)$，则 ρ 是 Y 中从 $y_0 = f(x_0)$ 到 $y_1 = g(x_0)$ 的路. 任给 $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$，今证

$$g_*[\alpha] = \rho_\# f_*[\alpha],$$

即 $[g \circ \alpha] = [\bar{\rho}][f \circ \alpha][\rho]$（用式(11)），或 $[\rho][g \circ \alpha] = [f \circ \alpha][\rho]$，后者又相当于

$$\rho * (g \circ \alpha) \sim (f \circ \alpha) * \rho.$$

这一等价可用如下同伦实现：

$$G(t,s)=\begin{cases}H(2s(1-t),\alpha(2st)), & 0\leqslant s\leqslant 1/2,\\ H(1-2t(1-s),\alpha(2s(1-t)+2t-1)), & 1/2\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

具体的验证由读者自己完成. □

作了以上准备之后，现在已可确立结论(12).

5.1.7 定理 若 $X\simeq Y$，则 $\pi_1(X)\cong\pi_1(Y)$.

证 设 $f:X\simeq Y$，g 是 f 的同伦逆，$x_0\in X$，$f(x_0)=y_0$，$g(y_0)=x_1$，$f(x_1)=y_1$. 由 $gf\simeq 1_X$，$fg\simeq 1_Y$ 及命题5.1.6(iii)推出：

$$\begin{cases}\rho_\#=g_*f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1), & (14a)\\ \gamma_\#=f_*g_*:\pi_1(Y,y_0)\to\pi_1(Y,y_1), & (14b)\end{cases}$$

其中 ρ 是 X 中从 x_0 到 x_1 的路，γ 是 Y 中从 y_0 到 y_1 的路. 因 $\rho_\#$ 与 $\gamma_\#$ 均为同构(用定理5.1.5)，故由式(14a)得出

$$f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0) \tag{15a}$$

为单同态；由式(14b)得出

$$f_*:\pi_1(X,x_1)\to\pi_1(Y,y_1) \tag{15b}$$

为满同态. 为区别式(15a)与式(15b)，将后者写成 $\tilde{f}_*$，则

$$f_*=\gamma_\#^{-1}\tilde{f}_*\rho_\#:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$$

亦是满同态，因而为同构. □

这就得出结论：基本群是同伦不变量.

D. 基本群的计算

对给定的空间 X 与 $x_0\in X$，依定理5.1.5，基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 有完全确定的意义，原则上并不应看作未知的对象. 在这个意义上，似乎并不存在求出基本群的问题. 但从认知与运用的角度考虑，倘若对于 $\pi_1(X,x_0)$ 的结构并无确切了解，因而无法利用它来将 X 与其他空间进行比较，那么，$\pi_1(X)$ 实际上只能是一个未知之物，于是"求出"它就成了一件不可避免的事. 如果能找到某个熟知的群 G 并能确认 $\pi_1(X)\cong G$，自然就认为，G 正是所要求的基本群 $\pi_1(X)$. 或者，若能以某种方式完全描述群 $\pi_1(X)$ 的结构，则亦应认为 $\pi_1(X)$ 已成为已知. 在以上两种情况下，都可以说已"算"出了 $\pi_1(X)$. 当然，此处所说的"计算"与你从其他课程所熟悉的计算有很大不同.

基本群的应用自然依赖于能否算出足够多的基本群. 然而，结果并不容乐观. 问题在于，并没有计算基本群的普遍有效的方法. 不过，仍然可提出若干一般策略. 其要点是：首先算出若干最特殊空间(例如可缩空间、S^n 等)的基本群，然后依据一定规则逐步扩大已有的结果. 扩大的途径主要是：

(i) 考虑同伦等价关系，为此应用定理5.1.7；

(ii) 考虑积空间并应用下面将建立的命题5.1.8；

(iii) 考虑分解 $X = A \cup B$，尝试利用 $\pi_1(A)$，$\pi_1(B)$ 及 $A \cap B$ 的特殊性质确定 $\pi_1(X)$，为此可用下面的定理5.1.9.

这一套策略在类似的形式下也用于计算同调群，因此值得注意.

5.1.8 命题　$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \oplus \pi_2(Y)$.

证　令 $Z = X \times Y$，取定 $z_0 = (x_0, y_0) \in Z$. 分别以 p 与 q 记 Z 到 X 与 Y 的投影，定义

$$\varphi = (p_*, q_*) : \pi_1(Z, z_0) \to \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0) \tag{16a}$$

$$\begin{cases} \psi : \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_2(Y, y_0) \to \pi_1(Z, z_0), \\ \quad ([\alpha], [\beta]) \to [(\alpha, \beta)]. \end{cases} \tag{16b}$$

若 $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$，$[\beta] \in \pi_1(Y, y_0)$，$F : \alpha \simeq \alpha'$ 与 $G : \beta \simeq \beta'$ 是定端同伦，则

$$H = (F, G) : (\alpha, \beta) \simeq (\alpha', \beta')$$

亦是定端同伦. 这表明映射(16b)的定义是合理的. 显然

$$\varphi[(\alpha, \beta)] = ([\alpha], [\beta]),$$

故 φ 与 ψ 互为逆映射. 因此只要证明 φ 为同态(从而必为同构). 任给 $[\gamma], [\gamma'] \in \pi_1(Z, z_0)$，有

$$\begin{aligned} \varphi([\gamma][\gamma']) &= (p_*([\gamma][\gamma']), q_*([\gamma][\gamma'])) \\ &= ((p_*[\gamma])(p_*[\gamma']), (q_*[\gamma])(q_*[\gamma'])) \\ &= (p_*[\gamma], q_*[\gamma])(p_*[\gamma'], q_*[\gamma']) \\ &= (\varphi[\gamma])(\varphi[\gamma']), \end{aligned}$$

这表明 φ 是一个同态，如所要证. □

以下定理是更一般的Van Kampen 定理的特殊情况.

5.1.9 定理　设 $X = A \cup B$，A 与 B 是开集，$A \cap B$ 是非空路连通集，且满足以下条件：

$$A \text{ 与 } B \text{ 中基点在 } A \cap B \text{ 中的闭路在 } X \text{ 中等价于常闭路}, \tag{17}$$

则 $\pi_1(X)$ 是平凡群.

为简单起见，今后以 $G = 1$ 表示 G 为平凡乘法群.

显然，条件(17)蕴涵于如下更强的条件：

$$\pi_1(A) = 1 = \pi_1(B). \tag{17$'$}$$

证　取定 $x_0 \in A \cap B$，只要证 $\pi_1(X, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$，即对任给 $\alpha \in \Omega(X, x_0)$，有 $\alpha \sim c_{x_0}$. 由条件(17)，只要求得 $\alpha' \in \Omega(A, x_0)$，使得在 X 中 $\alpha \sim \alpha'$. 因 $\{\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)\}$ 是 J 的开覆盖，由Lebesgue 覆盖引理4.1.10(vi)，当 J 的子区间 J_1 充分小时 J_1 含于 $\alpha^{-1}(A)$ 或 $\alpha^{-1}(B)$，即 $\alpha(J_1)$ 含于 A 或 B. 于是可作出 J 的分划：

$$J = \bigcup J_i, \quad J_i = [t_{i-1}, t_i] \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

使得 $\alpha(J_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 含于 A 或 B. 可设 $\alpha(t_i) \in A \cap B$（否则删去一些分点）. 令

$$\alpha_i(s) = \alpha((1-s)t_{i-1} + st_i) \quad (s \in J, 1 \leqslant i \leqslant n), \tag{18}$$

则 $\alpha_i \in C(J,X), \alpha_i(J) = \alpha(J_i)$. 若 $\alpha(J_i) \subset A$，则令 $\alpha'_i = \alpha_i$. 若 $\alpha(J_i) \subset B$，取 $A \cap B$ 中从点 x_0 到点 $\alpha(t_{i-1})$ 与 $\alpha(t_i)$ 的路 β 与 γ（见图 5-3），则 $(\beta * \alpha_i) * \bar{\gamma} \in \Omega(B, x_0)$. 由条件(17)，有

$$\beta * \alpha_i * \bar{\gamma} \sim c_{x_0} \tag{19}$$

令 $\alpha'_i = (\bar{\beta} * c_{x_0}) * \gamma$，则 $\alpha'_i(J) \subset A$，

$$[\alpha'_i] = [\bar{\beta}][c_{x_0}][\gamma]$$

$$= [\bar{\beta}][\beta][\alpha_i][\bar{\gamma}][\gamma] = [\alpha_i]. \quad \text{（用式(19)、(8)、(9)）}$$

因此，不论在哪种情况下，都有 $\alpha'_i(J) \subset A, \alpha'_i \sim \alpha_i$. 定义

$$\alpha'(s) = \alpha'_i\left(\frac{s - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right) \quad (s \in J_i, 1 \leqslant i \leqslant n),$$

则 $\alpha' \in \Omega(A, x_0), \alpha \sim \alpha'$，为所要证. □

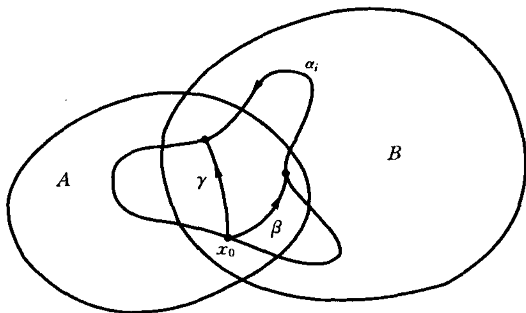


图 5-3

现在考虑几个具体例子.

5.1.10 例 (i) 可缩空间的基本群. 若 X 是可缩空间，则不妨设 $X = \{x_0\}$（用例 2.4.18 与定理 5.1.7），因而 $\pi_1(X, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$，即 $\pi_1(X) = 1$.

若 $\pi_1(X) = 1$，则称 X 为**单连通空间**. 因此，可缩空间必为单连通空间；但单连通空间却未必是可缩空间. 直观上，X 是单连通空间意味着其中每条闭路都可连续地变形为一点；$\alpha \sim c_{x_0}$ 意味着闭路 α 可连续地收缩于点 x_0.

(ii) $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}$ 看作加群. 设 $x_0 \in S^1, \alpha, \beta \in \Omega(S^1, x_0)$. 直观上，$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha$ 与 β 环绕 S^1（沿反时针方向为正）同样多的圈数 $k, k \in \mathbf{Z}$，从而推出 $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$. 但这一事实的严格证明并不简单，此处不拟详细写出.

(iii) $\pi_1(S^n) = 1 (n > 1)$. 下面以 S^2 为例说明，当 $n > 2$ 时情况是类似的. 设

$$S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : \sum x_i^2 = 1\};$$

$$A = \{x \in S^2 : x_3 > -1\},$$

$$B = \{x \in S^2 : x_3 < 1\}.$$

显然 $S^2 = A \cup B$，A 与 B 为开集，$A \cap B$ 是路连通的，A 与 B 均是可缩的(参看例5.1.3(iii))，因而条件(17)′满足. 于是由定理5.1.9 推出 $\pi_1(S^2) = 1$.

因此，当 $n > 1$ 时 S^n 是单连通的，但 S^n 不是可缩的，后一结论将用同调群来证实(参看例5.2.9(i)).

(iv) $\pi_1(T^n) \cong \mathbf{Z}^n$，这由(ii)与定理5.1.8 推出. 特别有 $\pi_1(T^2) \cong \mathbf{Z}^2$，这与 $\pi_1(S^2) = 1$ 比较立得结论：S^2 与 T^2 不同伦等价，从而更不可能同胚. 这就解答了本章开头所提出的问题.

对 $\pi_1(T^2) \cong \mathbf{Z}^2$ 这一结果可作如下直观解释：$\pi_1(T^2)$ 有两个生成元，它们可看作环面上绕行一圈的经线与纬线. 沿此两闭路各环绕任意圈，在同伦等价的意义上就得出 T^2 上的任意闭路，这些闭路环绕着两个“洞”. T^2 上存在两个洞这一事实，尽管从直观上看来甚为显然，但在点集拓扑的范围内，却不容易描述.

5.2　同　调　群

上节中已初步讨论过的基本群有两个明显的缺点.

(i) $\pi_1(X)$ 对于 X 的拓扑结构的依赖不够灵敏. 仅依靠基本群，甚至不足以区分 S^2 与 $\mathbf{R}^2$ 这样明显不同的空间.

(ii) $\pi_1(X)$ 一般是非交换群，对涉及映射的问题还要顾及基点的选择. 这些特点都使基本群不便于运用.

通过引进高阶同伦群(基本群可看作一阶同伦群)，上面所述的缺点(i)是能得到补救的，但缺点(ii)却无法消除. 这些都影响到基本群的有效应用. 这就促使人们去开发其他可能更具优势的系统，同调群就是这样的系统.

就其所遵循的基本精神而言，同调群与基本群是类似的. 但就其结构上的丰富性及其群性质的特点而言，同调群无疑更具优势，因而成为代数拓扑中的主要工具. 同调群的形成通常是一系列复杂构造过程的结果，远不如基本群那样，其构成相对较简捷且较具直观性. 而且，同调群的定义方式多种多样，不同的途径所要求的条件与处理方法都互有差异，因而呈现出很大的复杂性，这对于一门基础课来说，确是一个难以对付的问题. 考虑到这些情况，本节选择了其定义相对较简单的奇异同调群. 奇异同调群的思想是由 Lefschetz 于1933 年提出来的，而其系统处理则由 Eilenberg 在约10 年后完成. 尽管就直观性与可计算性而言，奇

异同调群并无优势，但它能同样清楚地体现出同调群的基本思路. 对于本书来说，这也就够了.

以下设 X,Y 等是任给拓扑空间. 上节中关于同伦的术语与记号仍然保持有效.

A. 同调群的定义

以 $\{e_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 记 $\mathbf{R}^n$ 的标准基，以

$$\Delta_{n-1} = [e_1, e_2, \cdots, e_n] \quad (n \geqslant 1) \tag{1}$$

记由 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 生成的凸集，它就是以 $e_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为顶点的 $n-1$ 维多面体，称之为 $n-1$ 维**标准单形**. $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ 见图 5-4.

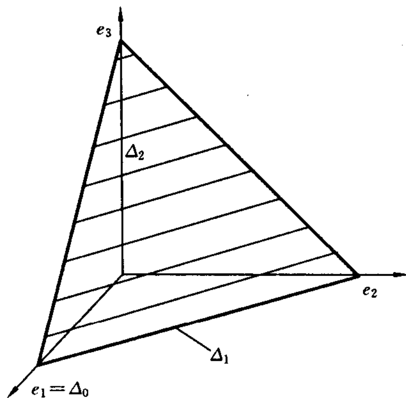


图 5-4

下面依次给出一连串概念，它们似乎惊人地繁琐且又缺乏直观性，但这是定义同调群所必需的.

(i) **奇异单形.** 令 $S_p(X) = C(\Delta_p, X)(p \geqslant 0)$，称每个 $s \in S_p(X)$ 为 X 上的 p 维奇异单形；称 $S(X) = \bigcup S_p(X)$ 为 X 的奇异复形.

直观上，X 上的0 维奇异单形就是点，1 维奇异单形可看作曲线段，2 维奇异单形可看作曲边三角形，如此等等.

(ii) **链群.** 以 $S_p(X)$ 中的元作为生成元生成一个加群 $C_p(X)$，称它为 X 的 p 阶奇异链群①，简称为链群；称每个 $c \in C_p(X)$ 为 X 上的 p 阶奇异链，简称为链. 形式上，链 c 是一个如下的线性组合：

$$c = \sum_{i=1}^{n} k_i s_i \quad (k_i \in \mathbf{Z}, s_i \in S_p(X), 1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N}), \tag{2}$$

① 此处不拟称 $C_p(X)$ 为"p 维奇异链群"，以免误解为 $C_p(X)$ 是"p 维自由 Abel 群". 称 $C_p(X)$ 为奇异 p- 链群，亦无不可.

$c = 0 \Leftrightarrow k_i = 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$.

(ii) **边界算子**. 定义一列群同态:

$$\partial = \partial_p : C_p(X) \to C_{p-1}(X) \quad (p \geqslant 0).$$

约定 $C_{-1}(X) = 0$, 因而 $\partial_0 = 0$. 若 $p > 0$,c 依式(2),则令

$$\partial c = \sum k_i \partial s_i;$$

对任何 $s \in S_p(X)$, 定义

$$(\partial s)(t_1, t_2, \cdots, t_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i s(t_1, \cdots, t_i, 0, t_{i+1}, \cdots, t_p). \tag{3}$$

可以粗略地认为 $\partial s = \sum (-1)^i s_i$,$s_i$ 是 s 的第 i 个顶点所对的 $p-1$ 维面. 例如, 在 $X = \mathbf{R}^n$ 中有

$$\partial[e_1, e_2] = e_2 - e_1,$$

$$\partial[e_1, e_2, e_3] = [e_2, e_3] - [e_1, e_3] + [e_1, e_2],$$

等等. 这显示出"边界"的直观意义. 一般地,对任何 $c \in C_p(X)$, 称 ∂c 为 c 的边界链,因而称 ∂ 为边界算子.

(iv) **闭链与边界链**. 约定

$$Z_p(X) = \operatorname{Ker} \partial_p, \quad B_p(X) = \operatorname{Im} \partial_{p+1} \quad (p \geqslant 0), \tag{4}$$

二者都是 $C_p(X)$ 的子群,分别称为 X 的 p 阶奇异闭链群与 p 阶奇异边界链群, 简称为闭链群与边界链群; $Z_p(X)$ 与 $B_p(X)$ 中的元分别称为 X 上的 p 阶奇异闭链与 p 阶奇异边界链,简称为闭链与边界链. 直观上,可将一阶闭链初步想象为闭路,而高阶闭链则是闭路的某种高维推广.

(v) **上链群**. 以 $C^p(X)$ 记 $C_p(X)$ 的对偶群,即(参考 1.3C)

$$C^p(X) = \operatorname{Hom}(C_p(X), \mathbf{Z}) \quad (p \geqslant 0).$$

称 $C^p(X)$ 为 X 的 p 阶奇异上链群,简称为上链群,其中的元称为 X 上的 p 阶奇异上链,简称为上链.

(vi) **上边界算子 δ**. δ 定义为 ∂ 的对偶同态,即(参看 3.1 节式(14))

$$\delta_p = \partial_{p+1}^* : C^p(X) \to C^{p+1}(X) \quad (p \geqslant 0),$$

它由如下恒等式唯一决定:

$$(\partial \varphi)(c) = \varphi(\partial c) \quad (\varphi \in C^p(X), c \in C_{p+1}(X)). \tag{5}$$

(vii) **上闭链与上边界链**. 约定(对照式(4))

$$Z^p(X) = \operatorname{Ker} \delta_p, \quad B^p(X) = \operatorname{Im} \delta_{p-1} \quad (p \geqslant 0), \tag{6}$$

规定 $B^0(X) = 0$; 二者分别称为 X 的 p 阶奇异上闭链群与 p 阶奇异上边界链群,其中的元分别称为上闭链与上边界链.

(viii) **同调群与上同调群**. 二者分别定义为商群:

$$\begin{cases} H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X), \\ H^p(X) = Z^p(X)/B^p(X) \end{cases} \quad (p \geqslant 0). \tag{7}$$

但商群定义的合理性还有待说明.

5.2.1 引理 $\partial^2 = 0, \delta^2 = 0$；更准确地,这意味着

$$\partial_p \partial_{p+1} = 0, \quad \delta_{p+1}\delta_p = 0 \quad (p \geqslant 0). \tag{8}$$

证 显然只需证 $\partial_p \partial_{p+1} = 0$，且只需考虑 $p \geqslant 1$ 的情况. 由 ∂ 的同态性质,只需对 $s \in S_{p+1}(X)$ 证$\partial^2 s = 0$. 利用式(3)有

$$\begin{aligned}
&(\partial^2 s)(t_1, t_2, \cdots, t_p) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\partial s)(t_1, \cdots, t_i, 0, t_{i+1}, \cdots, t_p)\} \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \Big[\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j s(t_1, \cdots, t_j, 0, t_{j+1}, \cdots, t_i, 0, t_{i+1}, \cdots, t_p) \\
&\quad + \sum_{j=i+1}^{p} (-1)^{j+1} s(t_1, \cdots, t_i, 0, t_{i+1}, \cdots, t_j, 0, t_{j+1}, \cdots, t_p) \Big] \\
&= \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} s(t_1, \cdots, t_j, 0, t_{j+1}, \cdots, t_i, 0, t_{i+1}, \cdots, t_p) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=j+1}^{p} (-1)^{i+j} s(t_1, \cdots, t_j, 0, t_{j+1}, \cdots, t_i, 0, t_{i+1}, \cdots, t_p).
\end{aligned}$$

上式右端第一项交换求和顺序后恰与第二项抵消,因此 $\partial^2 s = 0$，如所要证. □

利用引理5.2.1,从式(4)得出

$$\partial B_p(X) = \partial^2 C_{p+1}(X) = 0,$$

故得 $B_p(X) \subset Z_p(X)$. 同理,由 $\delta^2 = 0$ 与式(6)推出 $B^p(X) \subset Z^p(X)$. 这表明 $B_p(X)$ 与 $B^p(X)$ 分别为 $Z_p(X)$ 与 $Z^p(X)$ 的子群,因而商群 $H_p(X)$ 与 $H^p(X)$ 依式(7)有定义,二者分别称为 X 的 p 阶奇异同调群与 p 阶奇异上同调群,简称为同调群与上同调群. 这就完成了同调群的定义.

同调群的定义如此迂回曲折,你大概已深有体会. 与此相对照,基本群的定义似乎要简捷些. 你或许会说,$C_p(X)$ 已经是一个群,其构成很简单,且必然已包含基于它构成的 $H_p(X)$ 与 $H^p(X)$ 所具有的全部信息,但我们却舍其不用,而要用经过如此复杂手续得到的同调群 $H_p(X)$ 与 $H^p(X)$，岂不费解? 问题在于,$C_p(X)$ 太庞杂了,即使其中已蕴涵所需的信息,也不易从中发掘出来. 从 $C_p(X)$ 构成同调群 $H_p(X)$ 的过程,正是从中剔除那些与空间拓扑结构不发生本质联系的因素. 最后得到的同调群,自然更密切地联系于空间的拓扑结构,只是这种联系更不直观罢了.

与基本群不同,现在我们所得的不是一个群,而是以下两个群序列:

$$\begin{cases} H_*(X) = \{H_p(X) : p \geqslant 0\}, \\ H^*(X) = \{H^p(X) : p \geqslant 0\}. \end{cases} \tag{9}$$

这样的群序列比单个群 $\pi_1(X)$ 包含更多的信息,看来是没有疑问的. 还可注意

到，同调群都是交换群，而且不依赖于什么基点. 这就消除了基本群的主要缺点.

然而，与基本群相比，同调群更缺少直观性. 且让我们来看一下，对同调群中的元该作何解释. 任取 $[c] \in H_p(X)$，这意味着 $[c]$ 是 X 中 p 阶闭链的一个等价类，即 $c \in Z_p(X)$.

$$\begin{aligned} c' \in [c] &\Leftrightarrow c - c' \in B_p(X) \\ &\Leftrightarrow c - c' = \partial c'', c'' \in C_{p+1}(X). \end{aligned} \tag{10}$$

通常称 $[c]$ 为 p - 闭链的一个**同调类**；当 $c' \in [c]$ 时说 c' **同调于** c. 形式上，如上的 $[c]$ 可看作闭路类的某种推广. 但即使在 $p = 1$ 的情况下，也并不能简单地将 $[c]$ 与闭路类等同起来.

B. 诱导同态

如本段标题所指明的，此处所要作的事情正与 5.1C 相当，即对每个 $f \in C(X,Y)$，构成同态（实际上是一同态序列）

$$f_* : H_p(X) \to H_p(Y) \quad (p \geqslant 0),$$

使得 f_* 具有类似于命题 5.1.6 所表述的性质，因而同样得出所预期的结论：

$$X \simeq Y \Rightarrow H_p(X) \simeq H_p(Y). \quad (\text{对照 5.1 节式(12)}) \tag{11}$$

不过，同调群的构成经历了一些中间环节，因而从 f 构成 f_* 亦要经过相应的中间环节. 首先，由 $f \in C(X,Y)$ 直接诱导出如下同态

$$\begin{cases} f_p : C_p(X) \to C_p(Y), \\ f_p(s) = f \circ s \quad (s \in S_p(X)). \end{cases} \tag{12}$$

结合式(12)与式(3)易直接验证：

$$\partial_p f_p = f_{p-1} \partial_p : C_p(X) \to C_{p-1}(Y) \quad (p \geqslant 1). \tag{13}$$

由式(13)推出：

$$f_p Z_p(X) \subset Z_p(Y), f_p B_p(X) \subset B_p(Y) \quad (p \geqslant 0). \tag{14}$$

于是依同态定理 1.3.7，f_p 诱导出同态

$$f_{*p} : H_p(X) \to H_p(Y), \quad [c] \to [f_p(c)] \quad (p \geqslant 0). \tag{15}$$

当不致混淆时，就将 f_{*p} 写作 f_*，并称它为由 f 所诱导的同态. 同态 f_* 与 5.1 节式(13)中的 f_* 可以类比. 但此处不涉及基点，因而要更方便些. 下面就是与命题 5.1.6 相当的结果.

5.2.2 命题　诱导同态有以下性质：

(i) 若 $f \in C(X,Y), g \in C(Y,Z)$，则

$$(gf)_* = g_* f_* : H_p(X) \to H_p(Z) \quad (p \geqslant 0).$$

(ii) $(1_X)_* : H_p(X) \to H_p(X)$ 是单位映射.

(iii) 若 $f, g \in C(X,Y), f \simeq g$，则

$$f_* = g_* : H_p(X) \to H_p(Y) \quad (p \geqslant 0).$$

其中结论(i)和(ii)是平凡的,结论(iii)的证明则不那么简单,只好从略了.

从命题5.2.2得出结论(11),则几乎是一件例行的事情. 于是有

5.2.3 定理　若 $X \simeq Y$, 则 $H_p(X) \cong H_p(Y)$ $(p \geqslant 0)$.

证　设 $f: X \simeq Y$, g 是 f 的同伦逆,则有同态

$$f_*: H_p(X) \to H_p(Y) \text{ 与 } g_*: H_p(Y) \to H_p(X).$$

由 $gf \simeq 1_X$, $fg \simeq 1_Y$ 及命题5.2.2推出:

$$g_* f_*: H_p(X) \to H_p(X)$$

与

$$f_* g_*: H_p(Y) \to H_p(Y)$$

均为单位映射,因此 $f_*: H_p(X) \to H_p(Y)$ 是一同构. □

这就达到了与5.1C中同样的结论:**同调群是同伦不变量**.

若以 f^p 记 f_p 的对偶映射,即(依1.3节式(14))

$$f^p: C^p(Y) \to C^p(X), \quad \varphi \to \varphi \circ f_p, \tag{16}$$

则 f^p 是群同态;从 $\partial_p f_p = f_{p-1}\partial_p$ 推出 $f^p\delta = \delta f^{p-1}$, 因此

$$f^p Z^p(Y) \subset Z^p(X), f^p B^p(Y) \subset B^p(X) \quad (p \geqslant 0). \tag{14$'$}$$

于是 f^p 诱导出同态

$$f^*: H^p(Y) \to H^p(X). \quad (p \geqslant 0) \tag{15$'$}$$

与命题5.2.2对应的结果如下.

5.2.4 命题　诱导同态(15)′有以下性质:

(i) 若 $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,Z)$, 则

$$(gf)^* = f^* g^*: H^p(Z) \to H^p(X) \quad (p \geqslant 0).$$

(ii) $1_X^*: H^p(X) \to H^p(X)$ 是单位映射.

(iii) 若 $f, g \in C(X,Y)$, $f \simeq g$, 则

$$f^* = g^*: H^p(Y) \to H^p(X) \quad (p \geqslant 0).$$

这就同样得出以下定理.

5.2.5 定理　若 $X \simeq Y$, 则 $H^p(X) \cong H^p(Y)$ $(p \geqslant 0)$.

这就表明,上同调群也是同伦不变量.

C. 同调群的计算

如同基本群一样,同调群的计算并不容易,似乎比基本群的计算更困难,因对同一空间 X, 需要计算一列群 $H_p(X)$ (此处且不说 $H^p(X)$ 的计算). 就一般原则而言,5.1D中对于基本群所说的一切,在类似形式下亦适用于同调群,此处不必复述.

对于同调群的计算非常有用的一个特殊工具是正合序列(参考1.3C),下面考虑这样一种序列.

设 $X = A \cup B$, A, B 是开集,

$$i_1 : A \subset X, \quad i_2 : B \subset X,$$
$$j_1 : A \cap B \subset A; \quad j_2 : A \cap B \subset B;$$
$$i_* : H_p(A) \oplus H_p(B) \to H_p(X),$$
$$([c_1],[c_2]) \to i_{1*}[c_1] - i_{2*}[c_2];$$
$$j_* : H_p(A \cap B) \to H_p(A) \oplus H_p(B),$$
$$[c] \to (j_{1*}[c], j_{2*}[c]).$$

任给 $[c] \in H_p(X)$，必存在 $c_1 \in C_p(A), c_2 \in C_p(B)$，使得
$$[c] = [c_1 + c_2], \partial c_1 = - \partial c_2 \in Z_{p-1}(A \cap B),$$
令 $k_*[c] = [\partial c_1]$，可说明 $k_*[c]$ 与 c_1, c_2 的取法无关. 这就得到同态
$$k_* : H_p(X) \to H_{p-1}(A \cap B).$$

5.2.6 定理　依以上记号，有正合序列：
$$\cdots \xrightarrow{k_*} H_p(A \cap B) \xrightarrow{j_*} H_p(A) \oplus H_p(B) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{k_*} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{k_*} H_0(A \cap B) \xrightarrow{j_*} H_0(A) \oplus H_p(B) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \to 0. \qquad (17)$$
序列(17)称为 **Mayer-Vietoris 序列**，其正合性的证明并不容易，此处只能从略.

现在考虑计算同调群的一些具体例子. 首先用以下结果将 $H_0(X)$ 的计算排除在外.

5.2.7 命题　设 X 是路连通空间，则 $H_0(X) \cong \mathbf{Z}$.

证　因 $\partial_0 = 0$，故 $Z_0(X) = C_0(X)$，于是
$$H_0(X) = C_0(X)/\partial C_1(X).$$
其次可以认为 $S_0(X) = X$. 任给 $x_0, x_1 \in X$，由路连通性有 $s \in S_1(X)$，使 $\partial s = x_1 - x_0$，因此 $[x_0] = [x_1]$. 任给 $[c] \in H_0(X)$，可设 $c = \sum k_i x_i$ ($k_i \in \mathbf{Z}$, $x_i \in X$)，于是
$$[c] = \sum k_i [x_i] = k[x_0] \quad \left(k = \sum k_i \in \mathbf{Z}\right),$$
其中 $x_0 \in X$ 是任意取定的. 余下只要证明，当 $k \neq 0$ 时必有 $k[x_0] \neq 0$. 若 $k[x_0] = 0$，则 $kx_0 = \partial c, c \in C_1(X)$. ∂c 总可写成：
$$\partial c = \sum l_i (x_i - y_i) \quad (l_i \in \mathbf{Z}, x_i, y_i \in X).$$
比较 $kx_0 = \partial c$ 的系数得 $k = 0$. □

如果 $\pi_1(X)$ 是已知的，则利用以下结果可从 $\pi_1(X)$ 得出 $H_1(X)$，因而不妨认为 $H_1(X)$ 的计算也是已解决了的.

5.2.8 命题　设 X 是路连通空间，$x_0 \in X$. 任给 $\alpha \in C(J, X)$，定义
$$\alpha^+ ((1 - t)e_0 + te_1) = \alpha(t) \quad (t \in J),$$
则 $\alpha^+ \in S_1(X)$；

$$h: \pi_1(X,x_0) \to H_1(X), \quad [\alpha] \to [\alpha^+]$$

是一个满同态，且 Ker h 是 $\pi_1(X,x_0)$ 的换位子群，因而 $H_1(X)$ 就是 $\pi_1(X,x_0)$ 的交换化（参考命题1.3.9）. 特别，若 $\pi_1(X)$ 是Abel 群，则 $H_1(X) \cong \pi_1(X)$.

以上结果的证明可参看[13,p.180].

5.2.9 例 (i) 可缩空间的同调群. 设 X 是可缩空间，则不妨设 $X = \{x_0\}$，因而 $S_p(X)$ 是单元素集，$C_p(X) \cong \mathbf{Z}$. 以 s^p 记 p 维单形，则

$$\partial s^p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i s^{p-1} = \begin{cases} 0, & p \text{ 是奇数}, \\ s^{p-1}, & p \text{ 是偶数}. \end{cases}$$

由此得出：

$$Z_p(X) = \begin{cases} C_p(X), & p \text{ 是奇数或零}, \\ 0, & p \text{ 是偶数}; \end{cases}$$

$$B_p(X) = \begin{cases} C_p(X), & p \text{ 是奇数}, \\ 0, & p \text{ 是偶数}. \end{cases}$$

因此有

$$H_p(X) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & p = 0, \\ 0, & p > 0. \end{cases} \tag{18}$$

(ii) 对于 $S^n (n \geqslant 1)$ 今证明以下结论：

$$H_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & p = 0, n, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{19}$$

为应用定理5.2.6，令

$$A = \{x = (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in S^n : x_n > -1\},$$
$$B = \{x = (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in S^n : x_n < 1\}.$$

则 $S^n = A \cup B$，A，B 是 S^n 中的开集，且均为可缩，$A \cap B \simeq S^{n-1}$. 注意，对 $S^0 = \{-1, 1\}$ 有 $H_0(S^0) \cong \mathbf{Z}^2$，$H_p(S^0) = 0 (p > 0)$.

首先设 $n = 1$. 由式(17)有正合序列

$$H_1(A) \oplus H_1(B) \xrightarrow{i_*} H_1(S^1) \xrightarrow{k_*} H_0(S^0)$$
$$\xrightarrow{j_*} H_0(A) \oplus H_0(B),$$

即
$$0 \to H_1(S^1) \xrightarrow{k_*} \mathbf{Z}^2 \xrightarrow{j_*} \mathbf{Z}^2.$$

由此看出 k_* 是单同态. 为得到 $H_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$，只要证明 Ker $j_* \cong \mathbf{Z}$. 由 j_* 的定义，任给 $(\lambda, \mu) \in \mathbf{Z}^2$，有 $j_*(\lambda, \mu) = (\lambda + \mu, \lambda + \mu)$，故 $j_*(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\mu$，因而 Ker $j_* \cong \mathbf{Z}$. 若 $p > 1$，则正合序列

$$H_p(A) \oplus H_p(B) \xrightarrow{i_*} H_p(S^1) \xrightarrow{k_*} H_{p-1}(A \cap B)$$
$$\xrightarrow{j_*} H_{p-1}(A) \oplus H_{p-1}(B)$$

可写成

$$0 \to H_p(S^1) \xrightarrow{k_*} H_{p-1}(S^0) \to 0,$$

因此 $H_p(S^1) \cong H_{p-1}(S^0) = 0$. 这就对 $n = 1$ 证实了式(19).

其次设 $n > 1$，假定对 $n - 1$ 结论成立. 由式(17)有正合序列

$$H_1(A) \oplus H_1(B) \xrightarrow{i_*} H_1(S^n) \xrightarrow{k_*} H_0(A \cap B) \xrightarrow{j_*} H_0(A) \oplus H_0(B),$$

此即

$$0 \to H_1(S^n) \xrightarrow{k_*} \mathbf{Z} \xrightarrow{j_*} \mathbf{Z}^2,$$

可见 k_* 是单同态. $\forall \lambda \in \mathbf{Z}$，由 j_* 的定义有 $j_*(\lambda) = (\lambda, \lambda)$，由此看出 $\text{Ker } j_* = 0$，从而 $H_1(S^n) = 0$. 若 $p > 1$，则由

$$H_p(A) \oplus H_p(B) \xrightarrow{i_*} H_p(S^n) \xrightarrow{k_*} H_{p-1}(A \cap B) \xrightarrow{j_*} H_{p-1}(A) \oplus H_{p-1}(B)$$

得

$$0 \to H_p(S^n) \xrightarrow{k_*} H_{p-1}(S^{n-1}) \to 0,$$

因此由归纳假设有

$$H_p(S^n) \cong H_{p-1}(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & p = n, \\ 0, & p \neq n. \end{cases}$$

这就证明了式(19)成立.

已算出的同调群固然极有限，但已可用来推出一些重要结论. 最直接的推论如下.

5.2.10 推论　(i) $S^n (n \geqslant 1)$ 不是可缩空间.

(ii) 若 $m \neq n$，则 S^m 与 S^n 不同伦等价，因而亦不互相同胚.

(iii) 若 $m \neq n$，则 $\mathbf{R}^m$ 与 $\mathbf{R}^n$ 不互相同胚.

证　(i) 比较式(18)与式(19)看出，S^n 与可缩空间有相异的 n 阶同调群.

(ii) 由式(19)看出，$H_n(S^n) \neq 0 = H_n(S^m)$.

(iii) 若 $\mathbf{R}^m \cong \mathbf{R}^n$ (同胚)，则因 S^n 是 $\mathbf{R}^n$ 的一点紧化(参考例3.2.18)，必有 $S^m \cong S^n$，因而 $m = n$. □

关于同调群的更系统的应用在下节给出.

5.3　某 些 应 用

应用代数拓扑的知识，常常可对一些表面上看来与拓扑相距很远的问题得

出意想不到的结论. 虽然本书对于代数拓扑内容涉猎极为粗浅,无法系统展开其应用,但即使是最初步的应用,亦足以说明代数拓扑方法非同一般的效力.

让我们首先解释一下应用代数拓扑知识的某些一般思想. 设 P 是关于拓扑空间 X 的某个命题,我们希望应用某个同伦不变量(例如 $\pi_1(X)$ 或 $H_p(X)$)来判定 P 的真伪. 如果这一设想可行,那么势必对任何同伦等价于 X 的空间亦将得出同样的结论. 这就表明, P 实际上是一个同伦不变性质. 因而如我们多次指出的,这种性质必定是高度特殊且十分隐蔽的,不易为常规方法(如经典分析的方法)所发现. 这就注定了代数拓扑方法具有非同寻常的效力. 这无疑是代数拓扑方法的优势. 另一方面,既然代数拓扑以同伦不变性质作为其对象,那么对于非同伦不变性质就必定失效. 例如,设 X 是一个度量空间, $F: X \to X$, 代数拓扑必不能提供一种方法来判定 F 是否满足收缩性条件:

$$d(Fx,Fy) \leqslant d(x,y) \quad (x,y \in X).$$

就此而言,代数拓扑方法又是十分受限制的,并不能用来解决所有涉及拓扑空间的问题. 在你对代数拓扑方法可能满怀希望之际,这一点是不可不知的.

应用代数拓扑知识的途径是多种多样的. 下面给出一种模式,它未必最具普遍意义,但可用来说明问题.

问题 证实关于拓扑空间 X 的某个命题 P, P 通常描述了 X 上连续映射的一定性质.

解法 否定 P, 由此推出存在具一定性质的连续映射 $f: X \to Y$, Y 是已知的拓扑空间;而这就导出同态 $f_*: \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ 或 $f_*: H_p(X) \to H_p(Y)$, 但这将引出矛盾(例如 f 是同伦等价而 $\pi_1(X) \not\cong \pi_1(Y)$ 或 $H_p(X) \not\cong H_p(Y)$).

以上解法可行的前提是,所涉及空间的基本群或同调群是已知的. 可惜,已求出基本群与同调群的拓扑空间毕竟是很有限的,这就使得代数拓扑方法的应用只能限制在较特殊的空间范围内. 本节所介绍的最初步的应用则更限制于有限维球面这种极特殊的空间. 本节的问题主要应用同调群,这些问题的 1 维或 2 维特例通常亦可用基本群解决,遇到这种情况时读者不妨作为练习加以考察.

从上面用作说明的应用模式不应得出一种误解,似乎代数拓扑的每一次特殊应用都必定直接用到基本群或同调群. 实际上,在大多数情况下,人们只是套用某些标准的拓扑定理,这些定理的证明可能依赖于基本群或同调群,但它们的表述则未必直接涉及所述的群. 此外,在同调群的基础上系统地发展了一些拓扑工具,对于这些工具的运用常常是应用代数拓扑的重要形式. 在这类工具中,映射度大概是最典型的. 下面我们就来介绍它.

A. 映射度

设 $n \geqslant 1$. 任给 $f \in C(S^n, S^n)$, 由 5.2 节式(15), f 诱导出一个同态

$$f_*: H_n(S^n) \to H_n(S^n).$$

由5.2节式(19)，有 $H_n(S^n)\cong\mathbf{Z}$，这就不妨将上述同态写作 $f_*:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$. 定义

$$\deg f = f_*(1)\quad (f\in C(S^n,S^n)),\tag{1}$$

称 deg f 为 f 的**映射度**或**拓扑度**. 因映射度是Brouwer最先提出的，故也称之为**Brouwer 度**. 任取 $H_n(S^n)$ 的一个生成元 $[c]$，可将式(1)写成更准确的形式：

$$f_*[c] = (\deg f)[c].\tag{1)'$$

实际上，式(1)或式(1)′定义了一个整值函数：

$$\deg : C(S^n,S^n)\to\mathbf{Z},\quad f\to\deg f.\tag{2}$$

为使deg能成为一个有效的工具，必需能算出尽可能多的映射度 deg f. 原则上，式(1)已给出了 deg f 的计算公式. 但在 f_* 的性质不明的情况下，公式(1)很难起作用. 实际上，能依式(1)直接算出 deg f 的情况并不多. 为能尽可能扩大少数已知结果，必需建立关于deg的某些一般规则，下面的命题汇集了"度演算"的主要规则.

5.3.1 命题　映射度有以下性质：

(i) 若 $f\simeq g$，则 $\deg f=\deg g$.

(ii) $\deg(f\circ g)=(\deg f)(\deg g)$(以上 $f,g\in C(S^n,S^n)$).

(iii) $\deg 1_{S^n}=1$；$f\simeq 0\Rightarrow \deg f=0$；若 $f:S^n\to S^n$ 是同胚，则 $\deg f=\pm 1$.

证　(i) 由命题5.2.2(iii)推出.

(ii) 首先注意 $(fg)_*=f_*g_*:H_n(S^n)\to H_n(S^n)$ (命题5.2.2(i)). 取 $H_n(S^n)$ 的生成元 $[c]$，则

$$\begin{aligned}(fg)_*[c] &= f_*(g_*[c]) = f_*((\deg g)[c])\\ &= (f_*[c])(\deg g) = (\deg f)(\deg g)[c],\end{aligned}$$

这表明 $\deg(fg)=(\deg f)(\deg g)$.

(iii) 由 $(1_{S^n})_*=$ 单位映射(命题5.2.2(ii))推出 $\deg 1_{S^n}=1$. 若 $f\simeq 0$，则 $f_*=0:H_n(S^n)\to H_n(S^n)$ (用5.2节式(18))，故 $\deg f=0$. 若 f 是同胚，则由 $ff^{-1}=1_{S^n}$ 有

$$(\deg f)(\deg f^{-1})=\deg 1_{S^n}=1,$$

由此推出 $\deg f=\pm 1$.　□

命题5.3.1(i)表明，映射度是同伦不变量. 或者说，deg f 实际上仅依赖于 f 所属的同伦等价类，这就可将整值函数(2)改写成

$$\deg : [S^n,S^n]\to\mathbf{Z},\quad [f]\to\deg f,\tag{2)'$$

其中 $[S^n,S^n]$ 表示 $C(S^n,S^n)$ 中同伦等价类之全体. 由Hopf证明的一个著名结果(Hopf 度数定理)断言，映射(2)′是一个双射！

命题5.3.1(ii)表明，在计算 deg f 时可考虑适当地分解

$$f=f_1\circ f_2\circ\cdots\circ f_k,$$

使得 $\deg f_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 为已知或较易计算. 下面就是一个简单例子.

5.3.2 例　对任给 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in S^n$, 令

$$r(x) = -x, \tag{3}$$

$$r_i(x) = (x_i, \cdots, -x_i, \cdots, x_{n+1}) \quad (1 \leqslant i \leqslant n+1). \tag{4}$$

r 称为**对径映射**, 它实际上就是中心反射; r_i 是关于坐标超平面 $x_i = 0$ 的反射. 今指出

$$\deg r = (-1)^{n+1}, \quad \deg r_i = -1 (1 \leqslant i \leqslant n+1). \tag{5}$$

式(5)中的 $\deg r = (-1)^{n+1}$ 由 $r = r_1 r_2 \cdots r_{n+1}$ 及 $\deg r_i = -1$ 得出(用命题 5.3.1(ii)). 下面证 $\deg r_i = -1$. 由对称性, 只要指明 $\deg r_1 = -1$. 因 r_1 不改变坐标 $x_2, \cdots, x_{n+1}$, 不妨只考虑

$$r_1 : S^1 \to S^1, \quad (x_1, x_2) \to (-x_1, x_2).$$

取闭链 $c = s_1 + s_2 + s_3$ (见图5-5), 则

$$\begin{aligned} r_{1*}[c] &= [r_1(s_1) + r_1(s_2) + r_1(s_3)] \quad (\text{用 5.2 节式(15)}) \\ &= [-s_2 - s_1 - s_3] = -[c]. \end{aligned}$$

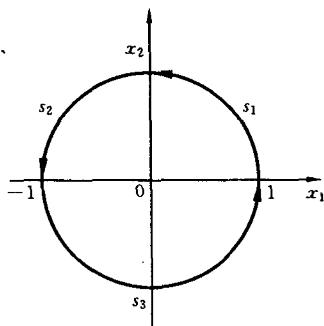


图 5-5

因 $[c]$ 是 $H_1(S^1)$ 的生成元, 故 $\deg r_1 = -1$.

将 S^1 看作 $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, 定义

$$f_k : S^1 \to S^1, z \to z^k \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

则有 $\deg f_k = k$. 直观上, $\deg f_k$ 表达了 $f(z)$ 环绕 S^1 的圈数(以反时针方向为正). 类比于此, 对任给 $f \in C(S^n, S^n)$, 可将 $\deg f$ 看作 $f(S^n)$ 覆盖 S^n 的某种重数. 这一说法并不确切, 但可以作为对 $\deg f$ 的一种初步理解. 若 $f(S^n)$ 覆盖不了 S^n, 即 $f(S^n) \neq S^n$, 则 f 是零伦的(用例 5.1.3 (iv)), 因而 $\deg f = 0$ (用命题5.3.1). 这一事实佐证了上面对映射度的覆盖解释.

因映射度是一种已数量化的拓扑不变量, 或者说是一种拓扑指标, 因而比同调群等拓扑不变量更便于应用. 映射度在现代数学中的应用是广泛而深刻的, 下面就是一个很能说明问题的例子. 更深入的应用将在下段考虑.

若 $f \in C(S^n, \mathbf{R}^{n+1})$ 满足条件:

$$x \cdot f(x) = 0 \quad (\forall\, x \in S^n), \tag{6}$$

其中 · 表示 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的标准内积, 则称 f 为 S^n 上的一个连续向量场. 显然, 条件(6)意味着 $f(x)$ 在 S^n 位于 x 处的切平面上. 向量场的零点称为**奇点**. 要使连续向量场 f 有奇点是很简单的事. 但要使 f 无奇点, 则未必总能办到, 这件事与 S^n 的拓扑特性有关.

5.3.3 定理(Brouwer-Poincaré) S^n 上存在无奇点的连续向量场 $\Leftrightarrow n$ 为奇数.

证 若 n 为奇数,定义

$$f(x) = (x_2, -x_1, \cdots, x_{n+1}, -x_n) \quad (x = (x_i) \in S^n),$$

则 $f \in C(S^n, \mathbf{R}^{n+1})$, 它显然满足条件(6),且没有奇点.

反之,设 f 是 S^n 上无奇点的连续向量场,则不妨设 $f \in C(S^n, S^n)$ (否则以 $f(x)/|f(x)|$ 取代 $f(x)$). 定义

$$H(t,x) = x \cos \pi t + f(x) \sin \pi t,$$

则利用 $x \cdot f(x) = 0$ 得出 $H \in C(J \times S^n, S^n)$. 于是

$$H: 1_{S^n} \simeq -1_{S^n} = r \circ 1_{S^n},$$

其中 r 依式(3). 这就得出

$$1 = \deg 1_{S^n} = \deg (r \circ 1_{S^n}) = (-1)^{n+1}, \quad (\text{用式}(5))$$

因而 n 为奇数. □

由定理5.3.3 特别推出,球面 S^2 上不存在无奇点的连续向量场. 由此又推出以下结论:若 $f \in C(S^2, \mathbf{R}^3)$, 则必对某个 $x \in S^2$, $f(x)$ 与 x 共线,即 $f(x) = \lambda x$. 否则,以 $g(x)$ 记 $f(x)$ 在 S^2 位于 x 处的切平面上的正投影,则 g 是 S^2 上的一个连续向量场且处处不为零. 直观上,将 $f(x)$ 看作粘贴在 x 处的毛发,则以上结论表明,无论你如何梳理这些毛发,都不能排除其中至少有一根保持直立(即 $f(x)$ 与 x 共线),除非 S^2 上存在某个"旋"(即使 $f(x) = 0$ 的点). 这就是有名的**纤毛球问题**,它是用代数拓扑方法获得解答的经典问题之一[①]. 你不妨尝试一下,如果不用定理 5.3.3(注意定理 5.3.3 是以代数拓扑为工具建立的),能否易从其他途径达到这一结论.

B. Borsuk 定理

在应用映射度所获得的关于球面映射的一系列结果中,最有趣的一部分结果都基于一个中心定理,它就是异常深刻的如下定理.

5.3.4 Borsuk 定理 若 $f \in C(S^n, S^n)$ 满足条件:

$$f(-x) = -f(x) \quad (x \in S^n), \tag{7}$$

即 f 是**奇映射**(或称保径映射),则 $\deg f$ 为奇数. 简言之,**奇映射有奇数度**.

以上定理有基于不同途径的多种证明,都不太简单,因此不拟介绍. 但在定理5.3.4 的基础上推出关于球面映射的其他结论,则并不很困难,似乎Borsuk 定理在其证明过程中已克服如此多的困难,因而积蓄了足够的能量,使得进一步推进变得很容易了. 下面将一系列推论汇集在一起,其中每一条结论都是饶有趣味

---

① 此问题的一个地理学解释是:在任一给定时刻,地球表面上必有一点的水平风速为零.

且有广泛应用的.

5.3.5 推论 对于 $f \in C(S^n, \mathbf{R}^n)$ 有以下结论成立:

(i) (Borsuk-Ulam 定理)若 $f(S^n) \subset S^{n-1}$, 则 f 必非奇映射.

(ii) 若 f 是奇映射,则 $f(x)$ 必有零点.

(iii) 必有 $x_0 \in S^n$, 使 $f(x_0) = f(-x_0)$.

(iv) f 不能是拓扑嵌入,因此, S^n 不能同胚于 $\mathbf{R}^n$ 的任何子集.

证 (i) 因 $f(S^n) \subset S^{n-1} \subset S^n$, 故可以认为 $f \in C(S^n, S^n)$. 若 f 是奇映射,则 $\deg f$ 为奇数(用定理5.3.4). 但由 $f(S^n) \neq S^n$ 推出 $\deg f = 0$, 得出矛盾. 故 f 必非奇映射.

(ii) 若 $f(x)$ 无零点,令 $g(x) = f(x)/|f(x)|$, 则 $g \in C(S^n, S^{n-1})$, 且 g 仍为奇映射,这与已证的(i)相矛盾.

(iii) 令 $g(x) = f(x) - f(-x)$, 则 $g \in C(S^n, \mathbf{R}^n)$, 且 g 是奇映射. 由已证的(ii), g 必有零点 $x_0 \in S^n$, 因而 $f(x_0) = f(-x_0)$.

(iv) 由已证的(iii), f 不是单射,更不可能为拓扑嵌入. □

设 $f \in C(S^n, \mathbf{R}^n)$, $f(S^n) \subset S^{n-1}$. 由推论5.3.5(iii)有 $x_0 \in S^n$, 使得 $f(x_0) = f(-x_0)$. 如此则 f 不能是奇映射,否则

$$f(x_0) = f(-x_0) = -f(x_0),$$

这推出 $f(x_0) = 0$, 而这与 $f(x_0) \in S^{n-1}$ 相矛盾. 由此可见,推论5.3.5 中的结论(i)~(iii)互相等价(从推论5.3.5 的证明可看出(i)⇒(ii)⇒(iii)),其中任何一个结论都可称为Borsuk-Ulam 定理,Borsuk 与 Ulam 于1933 年证明了这一结果.

在推论5.3.5 的诸结论中,结论(iii)或许是最有趣的,它表明 f 必定在一对对径点 x_0 与 $-x_0$ 处取同样的值,而这一结论完全不依赖于 f 的具体构成! 这一事实的特殊应用导致颇令人惊异的直观解释. 不妨将地球表面看作 S^2, 设 (α, β) 是在 S^2 上随点连续变化的一对物理参数,则 $f = (\alpha, \beta) \in C(S^2, \mathbf{R}^2)$. 于是由推论5.3.5(iii)有 $x_0 \in S^2$, 使得 $f(x_0) = f(-x_0)$, 即

$$\alpha(x_0) = \alpha(-x_0), \quad \beta(x_0) = \beta(-x_0).$$

这一结论的惊人之处在于,它丝毫不涉及 α 与 β 的物理含义. (α, β) 也许是(温度,气压),或者(风速,湿度)等. 如果有人告诉你:他已经严格证明了,在任何指定时刻,地球上必有一点,它与另一半球上的对径点处有同一温度与同一气压,你大概会不胜惊讶. 而依推论5.3.5(iii),这确是无疑的. 这只能表明,所述的结论实际上完全决定于球面的拓扑特性,并不关乎任何物理定律.

推论5.3.5(iii)(我们已指明它等价于Borsuk-Ulam 定理)又可用来推出其他一些同样有趣的结论,下面的结果是很著名的.

5.3.6 定理 设 $A_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有限测度之集,则有 $\mathbf{R}^n$ 中的超平面 π, 它同时将 $A_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 分为等测度的两半.

证　任给 $x=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in S^n$，令

$$H_x=\{(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in \mathbf{R}^n:\ \sum_1^n x_iy_i>x_0\},$$

$f_i(x)=m(A_i\cap H_x)$（m 记 n 维 Lebesgue 测度），则

$$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)\in C(S^n,\mathbf{R}^n).$$

取定 $x\in S^n$，使 $f(-x)=f(x)$（用推论 5.3.5(iii)），则 $\pi=\partial H_x$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个超平面，而 $A_i\cap H_x$ 与 $A_i\cap H_{-x}$ 就是由 π 分开的 A_i 的两半，它们有同样的测度. □

当 $n=3$ 时定理5.3.6 有如下有趣解释：设 A_1,A_2,A_3 分别为三明治（即夹心面包）的三个部分. 定理 5.3.6 的结论相当于总可以用一刀将三部分同时切为两半. 这就是著名的**三明治问题**，它也是应用代数拓扑方法获得解答的经典例子之一. 注意，问题的解答与三明治各部分的大小、形状及相互位置都无关系，因而是一个纯粹的拓扑结论. 正因为如此，它是拓扑以外的其他方法无法达到的.

C. 不动点定理

设 $f\in C(X,X)$. 若 $x_0\in X$ 满足 $f(x_0)=x_0$，则称 x_0 为 f 的**不动点**. 现代数学中很多问题（主要是方程问题）的解决可归结为某个映射存在不动点. 因此，关于不动点的结论（通常称为**不动点定理**）受到普遍关注. 为使 $f\in C(X,X)$ 有不动点，对于 f 与 X 自然应加一定限制. 对 f 的限制越少，对 X 的限制就越强，反之亦然. 若仅假定 f 连续，那么对于 X 就应加很强的条件，才能保证 f 有不动点. 在这方面有一系列深刻的现代研究，其中一个著名的结果断言：若 X 是紧凸集，则每个 $f\in C(X,X)$ 均有不动点. 这一重大结果的有限维情形可用代数拓扑方法得出，它就是以下的著名定理.

5.3.7 Brouwer 不动点定理　设 $f\in C(X,X)$，X 同胚于 n 维闭单位球 B^n，则 f 有不动点.

证　取同胚 $h:X\to B^n$，则 $g\triangleq hfh^{-1}\in C(B^n,B^n)$. 若 g 有不动点 x_0，则

$$h^{-1}(x_0)=h^{-1}g(x_0)=f(h^{-1}(x_0))$$

就是 f 的不动点. 因此，下面不妨设 $X=B^n$. $n=1$ 的情形不难用初等方法证明，下面假定 $n>1$.

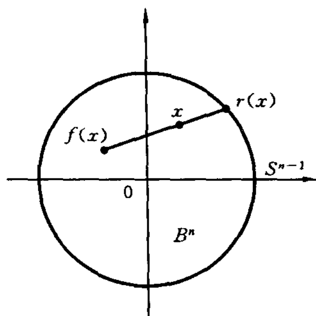


图 5-6

用反证法. 设 f 在 B^n 上无不动点. $\forall\, x\in B^n$，从 $f(x)$ 经 x 的射线必交 $S^{n-1}=\partial B^n$ 于一点 $r(x)$（见图 5-6，$f(x)\neq x$ 用于此！）. 这就得到 $r\in C(B^n,S^{n-1})$，$r(x)=x(\forall\, x\in S^{n-1})$，可见 r 是从 B^n 到 S^{n-1} 的一个收缩. 设 $i:S^{n-1}\subset B^n$，则 $ri=1_{S^{n-1}}$，因而

$$r_* i_* : H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(S^{n-1})$$

是单位映射. 另一方面,从同态

$$r_* : 0 = H_{n-1}(B^n) \to H_n(S^{n-1})$$

看出 $r_* = 0$, 得出矛盾. □

从定理证明得到一个附带结果.

5.3.8 推论 不存在从 B^n 到 S^{n-1} 的收缩.

习 题

261. 设 $f : X \simeq Y, g, h$ 是 f 的同伦逆,则 $g \simeq h$.

262. 设 $X_i \simeq Y_i (i = 1,2)$, 则 $X_1 \times X_2 \simeq Y_1 \times Y_2$.

263. $X \times J \simeq X$.

264. 设 $f \in C(X,Y)$. 若存在 $g, h \in C(Y,X)$, 使 $gf \simeq 1_X, fh \simeq 1_Y$, 则 $f : X \simeq Y$.

265. $A \subset X$ 是 X 的收缩核⇔任何 $F \in C(A,Y)$ 可扩张为 $\widetilde{F} \in C(X,Y)$.

266. 设 A 是 T_2 空间 X 的收缩核,则 A 是闭集.

267. 设 A 是紧(或连通)空间 X 的收缩核,则 A 是紧(或连通)集.

268. S^{n-1} 是 $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ 的强形变收缩核 $(n \geqslant 2)$.

269. S^2 除去一点之后可强形变收缩为一点.

270. X 是可缩空间 $\Leftrightarrow 1_X \simeq 0$.

271. X 是可缩空间 $\Leftrightarrow$ 对任何空间 Y 与 $f \in C(X,Y)$ 有 $f \simeq 0 \Leftrightarrow$ 对任何空间 Y 与 $g \in C(Y,X)$ 有 $g \simeq 0$.

272. X 是可缩空间 $\Leftrightarrow$ 对任何(或某个)拓扑空间 $Y, \forall f, g \in C(Y,X)$, 有 $f \simeq g$.

273. 可缩空间 X 是路连通的.

274. 设 X 是可缩空间, $x_0 \in X$, 则 $\{x_0\}$ 是 X 的形变收缩核.

275. 设 X 是可缩空间,则 X 的收缩核 A 亦是可缩空间.

276. $f \in C(S^n, X)$ 是零伦的 $\Leftrightarrow f$ 可扩张为 $f \in C(B^{n+1}, X)$.

277. 设 $f, g \in C(X, S^n), \forall x \in X, f(x) \neq -g(x)$, 则 $f \simeq g$.

278. 设 $\alpha \in C(J,X), \alpha(i) = x_i (i = 0,1)$, 作一定端同伦 $H : c_{x_0} * \alpha \simeq \alpha * c_{x_1}$.

279. 设 $\alpha \in C(J,X), \varphi \in C(J,J), \varphi(0) = 1, \varphi(1) = 0$, 则 $\bar{\alpha} \sim \alpha \circ \varphi$.

280. 设 $H \in C(J \times J, X), \alpha = H(0, \cdot), \beta = H(1, \cdot), \gamma = H(\cdot, 0), \delta = H(\cdot, 1)$, 则 $[\bar{\alpha}][\gamma][\beta] = [\delta]$.

281. $\rho_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ 与 $[\rho]$ 无关 $\Leftrightarrow \pi_1(X)$ 是 Abel 群。

282. 设 $f \in C(X,Y), f(x_0) = y_0, f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. f 是单射(或满射), f_* 不必为单同态(或满同态).

283. 设 $r : X \to A$ 是一个收缩, $i : A \subset X, x_0 \in A$, 则 $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ 是单同态; $r_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$ 是满同态.

284. 设 $f \in C(S^1, S^1)$ 无不动点,则 $f_* : \pi_1(S^1, 1) \cong \pi_1(S^1, f(1))$.

285. 设 $f \in C(S^1, S^1)$, $-f$ 无不动点,则 $f_* : \pi_1(S^1, 1) \cong \pi_1(S^1, f(1))$.

286. S^1 是 T^2 的收缩核而非形变收缩核.

287. X 是单连通的 $\Leftrightarrow$ 每个 $f \in C(S^1, X)$ 可扩张为 $f \in C(B^2, X)$.

288. 设 $f, g \in C(S^n, S^n)$, $\forall x \in S^n$, 有 $f(x) \neq -g(x)$, 则 $\deg f = \deg g$.

289. 设 $f \in C(S^n, S^n)$, $\forall x \in S^n$, 有 $f(x) \neq x$, 则 $\deg f = (-1)^{n+1}$.

290. 设 $f \in C(S^n, S^n)$, $\forall x \in S^n$, 有 $f(x) \neq -x$, 则 $\deg f = 1$.

291. 设 $f \in C(S^n, S^n)$. 若 $\deg f \neq (-1)^{n+1}$, 则 f 有不动点;若 $\deg f \neq 1$, 则 $-f$ 有不动点.

292. 设 $f, g \in C(S^{2n}, S^{2n})$, 则 f, g 与 $g \circ f$ 三者之一有不动点.

293. 设 $f \in C(S^{2n}, S^{2n})$ 无不动点,则有 $x_0, y_0 \in S^{2n}$, 使得 $f(x_0) = y_0, f(y_0) = x_0$.

294. 设 $f \in C(S^n, S^n)$, $\deg f =$ 偶数, 则有 $x \in S^n$, 使得 $f(-x) = f(x)$.

295. 设 $f \in C(S^n, S^n)$, $\forall x \in S^n$, 有 $f(-x) \neq f(x)$, 则 $f(S^n) = S^n$.

296. 设 $f \in C(S^n, \mathbf{R}^{n+1})$ 是奇函数, $f(S^n)$ 含于 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的某个 n 维子空间,则 f 在 S^n 上有零点.

297. 设每个 $f \in C(X, X)$ 有不动点, A 是 X 的收缩核,则每个 $f \in C(A, A)$ 有不动点. 由此推出 S^{n-1} 必非 B^n 的收缩核.

298. 设 $S^n = \bigcup A_i$, A_i 是非空闭集, $A_i \cap (-A_i) = \varnothing$, $1 \leqslant i \leqslant m$, 则 $m > n+1$.

299. 设闭集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 覆盖球 B^n, 则必有某个 $A_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 含有 ∂B^n 中一对对径点.

300. 设 $A_i (1 \leqslant i \leqslant n+1)$ 是连通闭集, $S^n = \bigcup A_i$, 则必有某个 A_i, 使对任何 $d \in [0,2]$, A_i 中存在一对相距为 d 的点.

习题答案与提示

1. $\tau_1=\{X,\varnothing\},\tau_2=\tau_1\cup\{\{0\}\},\tau_3=\tau_1\cup\{\{1\}\},\tau_4=2^X$.

2. 注意"$x_0\in A$"这一性质在任意并与交运算下保持不变.

3. 任给非空集 X 及集套 $\mathscr{A}\subset 2^X$，设当 $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$ 时 $\mathscr{B}^{\#}\in\mathscr{A}$，$X\in\mathscr{A}$，则 $\tau=\{\varnothing\}\cup\mathscr{A}$ 是 X 上的一个拓扑.

4. 属上题推广的特例.

5. 因 $A\cup B\in\{A,B,X\}$，$A\cap B\in\{A,B,\varnothing\}$，故只有以下三种情况：$A\subset B$；$A\supset B$；$A\cup B=X$ 且 $A\cap B=\varnothing$.

6. 对 τ 可验证开集公理$(O_1)\sim(O_3)$.

7. 如对 $X=\{0,1,2\}$，$\tau_i=\{X,\varnothing,\{i\}\}(i=0,1)$ 均是 X 上的拓扑，但 $\tau_0\cup\tau_1=\{X,\varnothing,\{0\},\{1\}\}$ 不是拓扑. 以 $\bigcup\tau_i$ 为子基生成的拓扑即为包含 $\bigcup\tau_i$ 的最小拓扑.

8. 因 $\mathscr{A}^*=\mathscr{B}$，故只要证 $\mathscr{B}$ 是拓扑基，为此只要证：若 $x\in(a,b)\subset\mathbf{R}$，则有 $\alpha,\beta\in\mathbf{Q}$，使 $x\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$.

9. $\mathscr{A}^*=\mathscr{B}$；$\mathscr{B}^{\#}=\mathbf{R}$；$[a,b)\cap[c,d)=[a\vee c,b\wedge d)$，故 $\mathscr{B}$ 是拓扑基.

10. $X\in\tau\Rightarrow\mathscr{B}^{\#}=X$；若 $A,B\in\mathscr{B}$，$x\in A\cap B$，则因 $A\cap B\in\tau$，$A\cap B$ 必为 $\mathscr{B}$ 中某些集之并，故有 $C\in\mathscr{B}$，使 $x\in C\subset A\cap B$.

11. 设 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 分别生成拓扑 τ_1 与 τ_2，则条件(i)推出 $\mathscr{B}\subset\tau_1$，从而 $\tau_2\subset\tau_1$. 反之若 $\tau_2\subset\tau_1$，则 $\mathscr{B}\subset\tau_1$，$\forall B\in\mathscr{B}$，B 是 $\mathscr{A}$ 中某些集之并，故 $x\in B\Rightarrow\exists A\in\mathscr{A}:x\in A\subset B$. 可见(i)$\Leftrightarrow\tau_2\subset\tau_1$；同理(ii)$\Leftrightarrow\tau_1\subset\tau_2$，(i)(ii)$\Leftrightarrow\tau_1=\tau_2$.

12. 令 $\mathscr{F}=\{X\}\cup\{A\subset X:A$ 为有限集$\}$，则对 $\mathscr{F}$ 可验证闭集公理$(C_1)\sim(C_3)$，因此 $\tau=\mathscr{F}'=\{\varnothing\}\cup\{A\subset X:A^c$ 为有限集$\}$ 是所求拓扑，它就是 X 上的有限补拓扑.

13. 任给 $x\in X$，取可数无限集 $\{x_n\}\subset X$，则 $A=\{x,x_1,x_3,\cdots\}\in\tau$，$B=\{x,x_2,x_4,\cdots\}\in\tau$，故 $\{x\}=A\cap B\in\tau$，因此 τ 是离散拓扑.

14. $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $A=\{x\}\cup(x,x+1)\in\tau$，$B=\{x\}\cup(x+1,x+2)\in\tau$，故 $\{x\}=A\cap B\in\tau$.

15. 设 $x\in V\in\tau$. 若 $\mathscr{B}$ 是拓扑基，则有 $B\in\mathscr{B}$，使 $x\in B\subset V$，可见 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域基；若 $\mathscr{B}$ 是拓扑子基，则有 $B\in\mathscr{B}^*$，使 $x\in B\subset V$，故 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域子基. 其次，若 $\forall x\in X$，$\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域基，则有 $B\in\mathscr{B}$，使 $x\in B\subset V$，可见 V 可表为 $\mathscr{B}$ 中集的并，故 $\mathscr{B}$ 是拓扑基. 若 $\forall x\in X$，$\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域子基，则有 $B\in\mathscr{B}^*$，使 $x\in B\subset V$，可见 $\mathscr{B}^*$ 是拓扑基，从而 $\mathscr{B}$ 是拓扑子基.

16. 令 $\tau=\{V\subset X:\forall x\in V$，有 $\mathscr{B}_x\vdash V\}$，则可验证 τ 满足开集公理. 取定 $x\in X$，以 $\mathscr{N}_x$ 记 x 依拓扑 τ 的邻域系. 任给 $A\in\mathscr{B}_x$，令 $V=\{z\in A:\mathscr{B}_z\vdash A\}$，则 $x\in V\subset A$. $\forall z\in V$，取 $B\in\mathscr{B}_z$，使 $B\subset A$；依定理2.1.8(iii)有 $C\in\mathscr{B}_z$，$\forall y\in C:\mathscr{B}_y\vdash B$，这推出 $C\subset V$，从而 $\mathscr{B}_z\vdash V$，故 $V\in\tau$. 因此 $A\in\mathscr{N}_x$，故 $\mathscr{B}_x\subset\mathscr{N}_x$. 若 $x\in V\in\tau$，则由 τ 的定义直接看出 $\mathscr{B}_x\vdash V$，这推出 $\mathscr{B}_x\vdash\mathscr{N}_x$，故 $\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域基.

17. 设 $x \in X$. 依拓扑 τ_w 有 $\mathscr{N}_x = \{X\}$，因此 $x_t \to x$；依拓扑 τ_s 有 $\{x\} \in \mathscr{N}_x$，故 $x_t \to x \Leftrightarrow x_t$ 最终等于 x.

若 τ 是 X 上的任给拓扑，则以上结论表明，x_t 依 τ_s 收敛于 $x \Rightarrow x_t$ 依 τ 收敛于 $x \Rightarrow x_t$ 依 τ_w 收敛于 x. 总之，拓扑愈强，收敛性亦愈强，反之亦然.

18. $x \in \mathbf{R}$ 依上拓扑的邻域为 $(-\infty, x+\varepsilon)(\varepsilon > 0)$. 因此，$x_n \to x \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, x_n$ 最终在 $(-\infty, x+\varepsilon)$ 内 $\Leftrightarrow \overline{\lim_n}\, x_n \leqslant x$.

19. $x \in \mathbf{R}$ 的一个邻域基是 $\{[x, x+\varepsilon] : \varepsilon > 0\}$. 因此，对于序列 $\{x_n\} \subset \mathbf{R}, x_n \to x \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, x_n$ 最终在 $[x, x+\varepsilon)$ 内 $\Leftrightarrow$ 在通常意义下 x_n 从 x 的右边收敛于 x. $1/n \to 0$，而 $\{-1/n\}$ 不收敛.

20. 设 $\{x_n\} \subset X, x \in X, V \in \mathscr{N}_x$. 因 V^c 是有限集，故 x_n 最终进入 V，除非 x_n 无限次重复取 V^c 中某个点. 特别，若 x_n 互不相同，则 x_n 收敛于 X 中每一点.

21. 设 $\{x_n\} \subset X, x \in X$. 因 $V = \{x\} \cup (V \backslash \{x_n\})$ 是 x 的邻域，故 $x_n \to x \Leftrightarrow x_n$ 最终等于 x. 这一条件与依离散拓扑收敛的条件一致（对照 17 题），而当 X 为不可数集时其中的可数补拓扑并非离散拓扑，这正表明可数补拓扑不能由序列收敛确定.

22. 以 Σ 记 I 的非空有限子集之全体，$\forall\, \sigma \in I$，令 $s_\sigma = \sum_{i\in\sigma} x_i$，则 $(\Sigma, \subset)$ 是一有向集，从而 $\{s_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ 是一网. 若 $s_\sigma \to s$，则定义 $s = \sum_{i \in I} x_i$，并称 s 为 $x_i (i \in I)$ 的和. $s_\sigma \to s$ 意味着：$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \sigma_0 \in \Sigma$，当 $\sigma \in \Sigma, \sigma \supset \sigma_0$ 时

$$\left| \sum_{i\in\sigma} x_i - s \right| < \varepsilon.$$

23. 若 $x \in \overline{A} \cap B^\circ$，则 $x \in \overline{A}$ 且 $B \in \mathscr{N}_x$. $\forall\, V \in \mathscr{N}_x$，有 $B \cap V \in \mathscr{N}_x$，因而 $A \cap B \cap V \neq \varnothing$，这表明 $x \in \overline{A \cap B}$. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ 是平凡的.

24. 必要性：取 $B = V$ 用题23. 充分性：取 $A = V^c$，由 $\overline{V^c} \cap V \subset \overline{V^c \cap V}$ 得 $V \cap \partial V = \varnothing$.

25. $\overline{A} \backslash \overline{B} = \overline{A} \cap B^{c\circ} \subset \overline{A \cap B^c} = \overline{A \backslash B}$（用题 23）.

26. 若闭包公理成立，则所给等式两边分别简化为 $\overline{A} \cup \overline{B}$ 与 $\overline{A \cup B}$. 反之，设题设等式成立，则取 $A = B = \varnothing$ 得 $\overline{\varnothing} = \varnothing$；取 $A = \varnothing$ 得 $\overline{\overline{B}} = \overline{B}$；取 $B = \varnothing$ 得 $A \cup \overline{A} = \overline{A}$，故 $A \subset \overline{A}$；这又推出 $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$，因此闭包公理成立.

27. 可仿定理 2.1.12(ii) 的证法证明，更简捷的作法是利用 2.1.12 的现成结论. 令 $\overline{A} = A^{coc}$，则可从内部公理推出闭包公理，因而在 X 上存在唯一拓扑 τ，使 $\overline{A}$ 恰为 A 的闭包，因而 $A^\circ = (\overline{A^c})^c$ 恰为 A 的内部.

28. 可仿照证 2.1 节式(21)的方法直接证明. 若利用 2.1 节式(21)，则有

$$\begin{aligned} A^\circ = (\overline{A^c})^c &= \bigcup \{B^c : A^c \subset B \subset X, B \text{ 为闭集}\} \\ &= \bigcup \{B : B \subset A, B \text{ 为开集}\}. \end{aligned}$$

29. $\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \backslash (A \cup B)^\circ \subset (\overline{A} \cup \overline{B}) \backslash (A^\circ \cup B^\circ) \subset (\overline{A} \backslash A^\circ) \cup (\overline{B} \backslash B^\circ) = \partial A \cup \partial B$；$\partial(\partial A) \subset \overline{\partial A} = \partial A$；$\partial A^\circ = \overline{A^\circ} \cap A^{\circ c} \subset \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A$.

30. $A \cap B \cap \partial(A \cap B) = A \cap B \cap \overline{(A \cap B)^c} = (A \cap B \cap \overline{A^c}) \cup (A \cap B \cap \overline{B^c}) = (A \cap B \cap \partial A) \cup (A \cap B \cap \partial B) = A \cap B \cap (\partial A \cup \partial B)$.

31. $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ = \varnothing \Leftrightarrow \overline{A} = A = A^\circ \Leftrightarrow A$ 是既开又闭之集.

32. 令 $\overline{A} = A \cup A^b$，则可验证 $A \to \overline{A}$ 满足闭包公理，且 $\partial A = (A \cup A^b) \cap (A^c \cup A^b) =$

A^b.

33. 只要证第一个结论. $A \cup A' \subset \overline{A}$ 是平凡的. 若 $x \in \overline{A} \backslash A$, 则 $x \in \overline{A \backslash \{x\}}$, 从而 $x \in A'$. 这表明 $\overline{A} \subset A \cup A'$.

34. $\overline{\varnothing} = \varnothing \Rightarrow \varnothing' = \varnothing$; $A'' \subset \overline{A'} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A} = A \cup A'$; 由 $A' \subset (A \cup B)'$ 与 $B' \subset (A \cup B)'$ 推出 $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$; 若 $x \overline{\in} A' \cup B'$, 则有 $U, V \in \mathscr{N}_x$, 使 $U \cap (A \backslash \{x\}) = \varnothing = V \cap (B \backslash \{x\})$, 因而 $U \cap V \cap ((A \cup B) \backslash \{x\}) = \varnothing$, 故 $x \overline{\in} (A \cup B)'$. $x \overline{\in} \{x\}'$ 是明显的. 反之,设算子 $A \to A'$ 具所述性质,则可验证 $\overline{A} = A \cup A'$ 满足闭包公理,因而在 X 上有唯一拓扑 τ 使 $\overline{A}$ 恰为 A 的闭包. 若 $x \in A'$, 则 $x \in ((A \backslash \{x\}) \cup \{x\})' = (A \backslash \{x\})' \subset \overline{A \backslash \{x\}}$; 反之,若 $x \in \overline{A \backslash \{x\}} = (A \backslash \{x\}) \cup (A \backslash \{x\})'$, 则 $x \in (A \backslash \{x\})' = A'$, 这表明 $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \backslash \{x\}}$, 即 A' 恰有 A 的导集.

35. 如设 $X = \{1,2,3\}, \tau = \{X, \varnothing, \{1,2\}\}, A = \{1\}$, 则 $A' = \{2,3\}, A'' = \{1,3\} \not\subset A'$; $A' = \{2,3\}$ 不是闭集.

36. 由 $A' \subset B \subset A$ 推出 $B' \subset A' \subset B$, 因而 B 为闭集.

37. 注意 $x \in A^\circ \Leftrightarrow x \overline{\in} \overline{A^c}, x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \backslash \{x\}}$, 用2.1节式(33).

38. 取 $x_n, y_n \in A$, 使 $d(x_n, y_n) \to \operatorname{diam} \overline{A} (n \to \infty)$, 这推出

$$\operatorname{diam} \overline{A} \leqslant \operatorname{diam} A.$$

39. 若 $y \in \overline{B_r(x)}$, 则有序列 $\{y_n\} \subset B_r(x), y_n \to y$, 于是

$$d(y,x) \leqslant d(y,y_n) + d(y_n,x) < d(y,y_n) + r \to r (n \to \infty),$$

这推出 $d(y,x) \leqslant r$, 即 $y \in \overline{B}_r(x)$. 可能有 $\overline{B_r(x)} \neq \overline{B}_r(x)$, 例如设 d 为离散度量,则 $\{x\} = \overline{B_1(x)} \neq \overline{B}_1(x) = X$ (设 X 不是单点空间).

40. 若 $1_X : (X,\tau) \to (X,\tau_s)$ 连续,则必 $\tau = \tau_s = 2^X$.

41. 仿题40.

42. 设 X 非离散空间,则有 $x \in X, \{x\}$ 不是开集. 以 f 记 $\{x\}$ 的特征函数,则 $\{f > 0\} = \{x\}$ 不是开集,因而 $f \overline{\in} C(X)$.

43. 设 $\mathscr{B}$ 是 Fx 的邻域子基. 若 F 在 x 处连续,则必有 $F^{-1}\mathscr{B} \subset \mathscr{N}_x$ (用命题2.2.2(ii)). 反之,若 $F^{-1}\mathscr{B} \subset \mathscr{N}_x$, 则 $F\mathscr{N}_x \vdash FF^{-1}\mathscr{B} \vdash \mathscr{B}$, 故 F 在 x 处连续(命题2.2.2(iii)).

44. 考察例2.1.10(vi)看出"当 $x \to x_0$ 时 $Fx \to Fx_0$" $\Leftrightarrow \forall V \in \mathscr{N}_{Fx_0}, \exists U \in \mathscr{N}_{x_0}: FU \subset V$, 后者正等价于 F 在 x_0 处连续.

45. 若 F 连续, $B \subset Y$, 则 $\partial(F^{-1}B) = \overline{F^{-1}B} \cap \overline{F^{-1}B^c} \subset F^{-1}\overline{B} \cap F^{-1}\overline{B^c} = F^{-1}(\partial B)$; 反之 $\partial(F^{-1}B) \subset F^{-1}(\partial B) \Rightarrow \overline{F^{-1}B} = F^{-1}B \cup \partial(F^{-1}B) \subset F^{-1}\overline{B}$.

46. 只要注意以下事实: $\forall b \in \mathbf{R}$, 有

$$\{f < b\} = \bigcup_{b > a \in A} \{f < a\}, \quad \{f > b\} = \bigcup_{b < a \in A} \{f > a\}.$$

47. f 在 x 处连续 $\Leftrightarrow$ 当 $x_n \to x$ 时依上拓扑有 $f(x_n) \to f(x) \Leftrightarrow$ 当 $x_n \to x$ 时 $\overline{\lim_n} f(x_n) \leqslant f(x)$ (用题18). 此条件满足时说 f 上半连续.

48. f 在 x 处连续 $\Leftrightarrow$ 当 x_n 从右边收敛于 x 时 $f(x_n) \to f(x) \Leftrightarrow f$ 在 x 右连续; g 在 $x = 0$ 不连续, h 连续.

49. $\varphi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (u,v) \to u + v, \psi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (u,v) \to uv$ 与 $F: X \to \mathbf{R}^2, x \to (f(x), g(x))$

均为连续映射,因此 $f+g=\varphi\circ F$ 与 $fg=\psi\circ F$ 均连续.

50. 设 $\{x_\alpha\}\subset X$ 是一个网, $x_\alpha\to x_0\in X$. $\forall\,\varepsilon>0$, 取定 t, 使得 $|f_t(x)-f(x)|<\varepsilon(\forall\,x\in X)$. 取 α_0, 使当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时 $|f_t(x_\alpha)-f_t(x_0)|<\varepsilon$, 则当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时有

$$\begin{aligned}|f(x_\alpha)-f(x_0)|&\leqslant|f(x_\alpha)-f_t(x_\alpha)|+|f_t(x_\alpha)-f_t(x_0)|+|f_t(x_0)-f(x_0)|\\&<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.\end{aligned}$$

51. 设 $f_t\rightrightarrows f$, 即 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,t_0,\forall\,t\geqslant t_0,\forall\,x\in X$, 有 $d(f_t(x),f(x))<\varepsilon$, 则必 $f\in C(X,Y)$. 证法如同题 50.

52. 注意 $FA^c=(FA)^c(A\subset X)$.

53. 若 F 是连续满射,则 $\forall\,B\in\tau_Y$, 有 $GB=GF(F^{-1}B)\in\tau_Z$; 若 G 是连续单射,则 $\forall\,A\in\tau_X$, 有 $FA=G^{-1}(GFA)\in\tau_Y$. 将"开"改成"闭",结论仍然成立.

54. 任给区间 $A=(a,b)$, $f(A)$ 是 S^1 上一段不含端点的弧,必为开集,因而 f 为开映射. 其次令 $B=\{2n\pi+1/n:n\in\mathbf{N}\}$, 则 B 为闭集,而 $f(B)=\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}/n}:n\in\mathbf{N}\}$ 以 1 为极限点,因而非闭集,故 f 不是闭映射.

55. F 非开映射: $F\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+$ 即非开集. F 是闭映射:设 $B\subset\mathbf{R}^2$ 是闭集, $(x,y)\in\overline{FB}$, 则有 $\{(x_n,y_n)\}\subset B$, 使 $x_n\to x,|y_n|\to y$. 可设 $\{y_n\}$ 的子列 $\{y_{n_k}\}$, 使 $y_{n_k}\to y$ (或 $y_{n_k}\to-y$, 这种情况是类似的),于是 $(x,y)=\lim\limits_k(x_{n_k},y_{n_k})\in B,(x,y)\in FB$.

56. 只要说明 f 映每个开区间为开区间.

57. 显然 $A^\circ\subset S^\circ$. 因 $A^\circ\subset A$ 且 A° 是相对开集,故 $A^\circ\subset A^i$, 因此 $A^\circ\subset S^\circ\cap A^i$. 其次,

$$\begin{aligned}S^\circ\cap A^i&=\bigcup\{S^\circ\cap S\cap V:V\in\tau_X,S\cap V\subset A\}\\&\subset\bigcup\{V:V\in\tau_X,V\subset A\}=A^\circ.\end{aligned}$$

58. $A^b=S\cap\overline{A}\cap\overline{S\backslash A}\subset S\cap\overline{A}\cap\overline{A^c}=S\cap\partial A$.

59. $\forall\,x\in A^d$, 有 $x\in S\cap\overline{A\backslash\{x\}}\subset\overline{A\backslash\{x\}}$, 故 $A^d\subset S\cap A'$. 反之,若 $x\in S\cap A'$, 则 $x\in S\cap\overline{A\backslash\{x\}}$, 故 $x\in A^d$.

60. 设 $\forall\,x\in X,V_x$ 是 x 的开邻域, $F|V_x\in C(V_x,Y)$, 于是由拼接引理 2.3.4 有 $F\in C(X,Y)$.

61. 注意 $X=\bigcup_2^\infty A^\circ{}_n,F|A^\circ{}_n\in C(A^\circ{}_n,Y)(n\geqslant2)$, 因而可用拼接引理 2.3.4.

62. 设 $x\in V=\bigcap_1^n P_{i_k}^{-1}V_k,V_k\in\tau_{i_k}$, 则 $x_{i_k}\in V_k$, 于是有 $B_k\in\mathscr{B}_{i_k}^*$, 使 $x_{i_k}\in B_k\subset V_k$, 从而 $x\in\bigcap P_{i_k}^{-1}B_k\triangleq B\subset V,B\in\mathscr{B}^*$.

63. 设 $x\in V=\prod_1^n V_i,V_i\in\tau_i$, 则有 $B_i\in\mathscr{B}_i$, 使 $x_i\in B_i\subset V_i$, 从而 $x\in\prod B_i\triangleq B\subset V,B\in\mathscr{B}$.

64. 考虑 $P:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R},(x,y)\to x,A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:xy=1,x,y>0\}$ 是闭集,但 $PA=(0,\infty)$ 不是闭集.

65. $\partial(A\times B)=\overline{A\times B}\cap\overline{(A\times B)^c}=\overline{A\times B}\cap\overline{(A^c\times Y)\cup(X\times B^c)}=((\overline{A}\cap\overline{A^c})\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times(\overline{B}\cap\overline{B^c}))=(\partial A\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\partial B)$.

66. 任取基开集 $V=\bigcap P_{i_k}^{-1}V_k,\varnothing\neq V_k\in\tau_{i_k}(1\leqslant k\leqslant n)$, 必有 $x\in X$, 使 $x_{i_k}\in V_k(1\leqslant k\leqslant n)$, 当 $i\neq i_1,\cdots,i_n$ 时 $x_i=x_i^0$, 故 $x\in V\cap A$, 这表明 $\overline{A}=X$.

67. 任给网 $\{(x_t,y_t)\}\subset A\times B$ 与 $(x,y)\in A\times B$, 无论是依 $A\times B$ 中的积拓扑,还是依

$A\times B$ 在 $X\times Y$ 中的相对拓扑，都有

$$(x_t,y_t)\to(x,y)\Leftrightarrow x_t\to x, y_t\to y.$$

68. $\mathbf{R}^2$ 的积拓扑有拓扑基 $\mathscr{B}=\{[a,b)\times[c,d):a,b,c,d\in\mathbf{R}\}$. $\forall\, x\in\mathbf{R}$, $\{(x,-x)\}=S\cap([x,x+1)\times[-x,-x+1))$ 是 S 中的相对开集，故 S 上的相对拓扑为离散拓扑.

69. 若 X 是离散空间，则 X_i 看作 X 的子空间必为离散空间. 要使 X 中的单点集为开集，除至多有限个例外，X_i 是单点空间. 任何有限个离散空间的积空间显然是离散空间.

70. 用题69或直接证明.

71. 因 $\beta^\#=X$ 且 β 对有限交封闭，故 β 是拓扑基. 因 β 包含了积拓扑的基开集，故箱拓扑强于积拓扑. 若 $V_i\in\tau_i$，且其中有无限个 V_i 是 X_i 的真子集，则 $V=\prod V_i$ 必非积拓扑的开集.

72. 令 $\mathscr{B}=\bigcup F_i^{-1}\tau_i$，则以 $\mathscr{B}$ 为子基在 Ω 上生成一拓扑 τ，它就是 Ω 上使每个 F_i 连续的最小拓扑.

73. 设 $B\subset Z$，则 $(GF)^{-1}B\in\tau_X\Leftrightarrow G^{-1}B\in\tau_Y\Leftrightarrow B\in\tau_Z$.

74. 设 $B\subset Z$，则 $G^{-1}B\in\tau_Y\Rightarrow(GF)^{-1}B\in\tau_X\Rightarrow B\in\tau_Z$.

75. 设 $V\subset B$. 若 A（从而 B）是开集，则 $F^{-1}V\in\tau_A\Rightarrow F^{-1}V\in\tau_X\Rightarrow V\in\tau_Y\Rightarrow V\in\tau_B$. 若 A（从而 B）是闭集，则 $F^{-1}V\in\tau_A\Rightarrow A\backslash F^{-1}V=F^{-1}(B\backslash V)$ 是 A 中的闭集 $\Rightarrow F^{-1}(B\backslash V)$ 是 X 中的闭集 $\Rightarrow B\backslash A$ 是 Y 中（也是 B 中）的闭集 $\Rightarrow V\in\tau_B$.

76. 分别以 $P:X\to X/\sim$ 与 $Q:Y\to Y/\approx$ 记商映射，则 G 合理定义且满足 $GP=QF$. 以 $QF\in C(X,Y/\approx)$ 代定理2.3.10(iii)中的 F 得 $G\in C(X/\sim,Y/\approx)$. 若 F 是商映射，则 QF 为商映射，因而 G 为商映射（用题74）. 若 $x\sim z\Leftrightarrow Fx\approx Fz$，即 $Px=Pz\Leftrightarrow QFx=QFz$，则 G 是同胚（用定理2.3.12）.

77. 首先从直观上断定商空间是球面 S^2. 然后构成

$$F:S^1\times J\to S^2,(\mathrm{e}^{ix},y)\to(\cos x\sin\pi y,\sin x\sin\pi y,\cos\pi y),$$

则 F 是商映射，$F(S^1\times\{0\})=(0,0,1)$，$F(S^1\times\{1\})=(0,0,-1)$.

78. 相当于规定 $(0,y)\sim(1,1-y)(0\leqslant y\leqslant 1)$，于是

$$X/\sim=\{(x,y):0<x<1,0\leqslant y\leqslant 1\}\cup\{\{(0,y),(1,1-y)\}:0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

$X/\sim$ 的一个直观模型就是 **Möbius** 带.

79. 由 T^2 的构作可知，$X=J\times J$ 的两对对边分别粘合得到 T^2 的一经圆与一纬圆. 将二者粘合成一点相当于将 X 的周边粘合成一点，所得为球面 S^2.

80. 首先注意 $J\times J\cong[-1,1]\times[-1,1]\triangleq R$. 每个 $x\in R\backslash\{0\}$ 均可唯一地表示成 $x=tz$, $0<t\leqslant 1$, $z\in\partial R$，定义 $f(tz)=tz/|z|$, $f(0)=0$，则 $f:R\to B^2$ 是一个双射，只要证 f 连续. 若 $t_nz_n\to 0$, $z_n\in\partial R$，则必 $t_n\to 0$，因而 $f(t_nz_n)\to 0$. 若 $t_nz_n\to tz\neq 0$，则有 $t_{n_k}\to t'$, $z_{n_k}\to z'\in\partial R$，由 $tz=t'z'$ 得 $t=t'$, $z=z'$，故 $t_n\to t$, $z_n\to z$，因此 $f(t_nz_n)\to f(tz)$.

81. 定义 $F:\mathbf{R}^n\to B, x\to x/(1+|x|)$，则 F 连续. 由 $Fx=y$ 可唯一地解出 $x=y/(1-|y|)$，故 $F^{-1}:B\to\mathbf{R}^n, y\to y/(1-|y|)$ 亦连续，因此 $F:\mathbf{R}^n\cong B$.

82. xz 平面上的圆 $(x-2)^2+z^2=1$ 绕 z 轴旋转一周得到环面 $(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1$，将其记为 R, R 可表为参数方程：

$$x = r\cos 2\pi\theta, \quad y = r\sin 2\pi\theta, \quad (r-2)^2 + z^2 = 1,$$

其中 $0 \leqslant \theta \leqslant 1, 1 \leqslant r \leqslant 3$. 定义

$$F : J \times J \to R, \quad (\theta, t) \to (r(t)\cos 2\pi\theta, r(t)\sin 2\pi\theta, z(t)),$$

其中

$$r(t) = \begin{cases} 4t+1, & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 5-4t, & 1/2 \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} \sqrt{8t(1-2t)}, & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ -\sqrt{8t(3-2t)-8}, & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

则 F 是商映射，$F(0,t) = F(1,t), F(\theta,0) = F(\theta,1)$，故 $T^2 \cong R$.

83. 由 GF 为单射推出 F 是单射. 任给网 $\{x_t\} \subset X$ 与 $x \in X$，有 $x_t \to x \Rightarrow Fx_t \to Fx \Rightarrow GFx_t \to GFx \Rightarrow x_t \to x$. 若 G 为双射，则 F 亦为双射，因而 F 与 $G = (GF)F^{-1}$ 均为同胚.

84. 令 $Z = X \cup (Y \backslash FX), F : X \to Y$ 是一拓扑嵌入. 令

$$Gz = \begin{cases} Fz, & z \in X, \\ z, & z \in Y \backslash FX, \end{cases}$$

则 $G : Z \to Y$ 是一双射，$\tau_Z = G^{-1}\tau_Y$ 是 Z 中的一个拓扑，依此拓扑 G 为同胚. 因 $G|X = F : X \cong FX$，故 X 是 Z 的子空间.

85. 设 $Q : X \times Y \to Y$ 是投影，则 $F = QG$. 若 G 连续，则 F 连续. 若 F 连续，则 $G = (1_X, F)$ 连续(用命题2.3.7(vi)). 任给网 $\{x_t\} \subset X, (x_t, Fx_t) \to (x, Fx) \Rightarrow x_t \to x$，可见 G 为拓扑嵌入. G 为拓扑嵌入亦可由以下事实推出：设 $P : X \times Y \to X$ 是投影，则 $PG = 1_X, GP = 1_{\mathrm{Gr}F}$.

86. 设 $x = (x_n) \in X, \mathscr{B}_n$ 是 x_n 的可数邻域基，$P_n : X \to X_n$ 是投影，则 $\bigcup P_n^{-1}\mathscr{B}_n$ 是 x 的可数邻域子基.

87. 取 x 的可数开邻域基 $\{V_n\}$，可设 $\{V_n\}$ 是一降列. 取 $x_1 \in V_1 \cap (A \backslash \{x\}), x_2 \in (V_2 \backslash \{x_1\}) \cap (A \backslash \{x\}), \cdots, x_n \in (V_n \backslash \{x_1, \cdots, x_{n-1}\}) \cap (A \backslash \{x\})$，则 $\{x_n\}$ 即为所求.

88. 取可数拓扑基 $\{B_n\}$，令 $I = \{i \in \mathbf{N} : \exists A \in \mathscr{A}, 使 B_i \subset A\}, \forall i \in I$，取定 $A_i \in \mathscr{A}$，使 $B_i \subset A_i$，则 $\mathscr{B} = \{A_i : i \in I\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的可数子族. $\forall x \in X$，有 $A \in \mathscr{A}$ 使 $x \in A$；于是必有 B_i 使 $x \in B_i \subset A$，从而 $x \in A_i$. 这表明 $\mathscr{B}^{\#} = X$.

89. 否则 $\forall x \in A$，有 x 的开邻域 V_x，使 $V_x \cap (A \backslash \{x\})$ 是可数集. 因 A 作为 X 的子空间是第二可数的，故有可数个 $x_i \in A$，使得 $A \subset \bigcup V_{x_i}$ (用题88)，令 $B = \{x_i\}$，则

$$可数集 = \bigcup (V_{x_i} \cap (A \backslash \{x_i\})) \supset (\bigcup V_{x_i}) \cap (A \backslash B) = A \backslash B = 不可数集！$$

90. 设 $\mathscr{B}$ 是一可数拓扑基，$\forall A \in \mathscr{A}$，取 $B \in \mathscr{B}$，使 $\varnothing \neq B \subset A$，则得一单射 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$，故 $\mathscr{A}$ 是可数族(用定理1.1.8).

91. 设 $\mathscr{B}$ 是一可数拓扑基. $\forall x \in X$，必有 $B_x \in \mathscr{B}, x \in B_x$，使 B_x 是可数集. 这样的 B_x 仅可数多个且覆盖 X，故 X 可数.

92. 因对任何无限集 $A \subset X$ 有 $\overline{A} = X$，故 X 可分. 若 X 是可数集，则 X 中仅有可数个开集，故 X 是第二可数的. 若 X 不可数，则 X 不是第一可数的：设 V_n 是 x 的可数个邻域，则 $A = \bigcup V_n^c$ 是可数集，故有非空有限集 $B \subset A^c, V = \{x\} \cup B^c$ 是 x 的一个邻域，$V \not\subset V_n (\forall n \in \mathbf{N})$.

93. 若 X 是可数集，则 X 是离散空间，且必可分. 若 X 非可数集，则 X 必非离散空间；$\overline{A} = X \Rightarrow A$ 不可数，故 X 不可分；X 不是第一可数的，其证法同题 92.

94. 第一可数性：每点 $x \in \mathbf{R}$ 有可数邻域基 $\{[x, x + 1/n] : n \in \mathbf{N}\}$；可分性：$\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$；非第二可数性：任给可数族 $\{[a_n, b_n)\}$，取 $a \in \mathbf{R} \backslash \{a_n\}$，则 $[a, a+1)$ 不是 $\{[a_n, b_n)\}$ 的任何子族之并；$\mathbf{R}^2$ 的不可分子空间：如 $S = \{(x, -x) : x \in \mathbf{R}\}$（用题 68）.

95. 用定理 2.4.7(ii).

96. $A = \{0,1\}^{\Omega}$ 是 $B(\Omega)$ 中的不可数集，当 $x, y \in A, x \neq y$ 时 $d(x,y) = 1$. 若 $\overline{B} = B(\Omega)$，则有一个单射 $A \to B$，B 必为不可数集.

97. 因 X_∞ 中含 ∞ 的唯一闭集是 X_∞，故 $\overline{\{\infty\}} = X_\infty$，$X_\infty$ 是可分的. 若 X 有可数拓扑基 $\mathscr{B}$，则 $\{B \cup (\infty) : B \in \mathscr{B}\}$ 是 X_∞ 的可数拓扑基.

98. 取 X_n 的可数稠集 A_n，固定 $a = (a_n) \in \prod A_n$，令 $A = \{x = (x_n) \in \prod A_n$ ：除至多可数个例外 $x_n = a_n\}$，则 A 是可数集. 若 $V = \prod_1^n V_i \times \prod_{j>n} X_j$ 是 X 的非空基开集，则有 $x = (x_i)$，使当 $i \leqslant n$ 时 $x_i \in V_i \cap A_i$，$j > n$ 时 $x_j = a_j$，于是 $x \in A \cap V$. 故 $\overline{A} = X$.

99. $F : \{0,1\}^{\omega} \cong X, x = (x_i) = \sum_1^{\infty} 2x_i/3^i$.

100. 设 B 为开集，则 $\overline{A \cap B} = \overline{\overline{A} \cap B} \supset \overline{A} \cap B = \overline{B} = X$（用题 24）.

101. 若 x 与 y 由邻域 U 与 V 分离，则 $y \overline{\in} \overline{U}$. 反之，$y \overline{\in} \overline{U} \Rightarrow \exists V \in \mathscr{N}_y : U \cap V = \varnothing$.

102. 对 n 用归纳法. 设 $V_i \in \mathscr{N}_{x_i} (1 \leqslant i < n)$ 互不相交，$n \geqslant 1$. 取 $U_i \in \mathscr{N}_{x_i}, W_i \in \mathscr{N}_{x_n}$，使 $U_i \cap W_i = \varnothing (1 \leqslant i < n)$，令 $A_i = V_i \cap U_i (1 \leqslant i < n), A_n = \bigcap_1^{n-1} W_i$，则 $A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n$ 互不相交.

103. 只要指明：$\forall x \in X, \{x\}$ 是闭集，这由题 101 推出.

104. 只要指明：闭集族 $= 2^X$，用题 103.

105. 若 X 是离散空间，则 $\{\{x\} : x \in X\}$ 是互不相交的无限开集族. 若 X 非离散，则有 $x \in X'$. 取 $x_1 \neq x$，以开集 V_1 与 U_1 分离 x_1 与 x；取 $x_2 \in U_1 \backslash \{x\}$，以开集 V_2 与 U_2 分离 x_2 与 x，可设 $V_2, U_2 \subset U_1$. 如此作下去得到互不相交的非空开集列 $\{V_n\}$.

106. 若 $V \in \mathscr{N}_x$ 只含 A 中有限个点 $B = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，可设 $x \overline{\in} B$，V 是开集，则 $V \backslash B$ 是 x 的开邻域，$(A \backslash \{x\}) \cap (V \backslash B) = \varnothing$，与 $x \in A'$ 矛盾.

107. 只要证 $\{x\}' = \varnothing$（参考题 34）. 若 $y = \{x\}'$，则必 $y \neq x$（用题 34），这与 x, y 可邻域分离相矛盾.

108. 若 A^c 与 B^c 是互不相交的非空开集，则 $X = A \cup B$ 是有限集.

109. 若 A^c 与 B^c 是互不相交的非空开集，则 $X = A \cup B$ 是可数集.

110. 因 $X = X_i \times \prod_{j \neq i} X_j$，故只要证：若 $X = Y \times Z$，Z 是 T_2 空间，则 Y 是 X 的闭子空间. 取定 $z_0 \in Z$，则 $Y \to X, y \to (y, z_0)$ 是一拓扑嵌入. 若 $(y_t, z_0) \to (y, z)$，则必 $y_t \to y, z_0 = z$（用 Z 为 T_2 空间！），因而 $Y \times \{z_0\} (\cong Y)$ 是 X 的闭子空间.

111. 若 $Fx_1 \neq Fx_2$，则 $x_1 \neq x_2$；设 U, V 是分离 x_1 与 x_2 的开集，则 FU 与 FV 是分离 Fx_1 与 Fx_2 的开集.

112. $\varphi \triangleq (F, G) \in C(X, Y \times Y)$，故 $A = \varphi^{-1}(\Delta_Y)$ 是闭集（用命题 3.1.2）. 或用以下证法：若 $x \in \overline{A}$，则有 $\{x_t\} \subset A$，使 $x_t \to x$，于是 $Fx_t = Gx_t \to Fx = Gx$（用连续性与极限唯一

性)，故 $x \in A$.

113. 用上题.

114. 设 $x,y \in X$ 不可邻域分离，$\{U_n\}$ 与 $\{V_n\}$ 分别为 x 与 y 的下降的邻域基，取 $x_n \in U_n \cap V_n$，则 $x_n \to x, x_n \to y$.

115. 取 x 的下降邻域基 $\{V_n\}$. 令 $B_1 = V_1$；取 x 的闭邻域 $A_1 \subset B_1$，取 $n_2 > 1$，使 $V_{n_2} \subset A_1$，令 $B_2 = \overline{V_{n_2}}$，则 $\overline{B_2} \subset B_1$. 如此作下去可得所要的 $\{B_n\}$.

116. 当 $2r = d(x,y) > 0$ 时 $U_r(x)$ 与 $U_r(y)$ 分离 x 与 y；$U_r(x)$ 不能含 x 的任何闭邻域.

117. 令 $B = \bigcap \{V : V \in \mathscr{N}_A\}$. 显然 $A \subset B$. 若 $x \in A^c$，则由正则性有 $V \in \mathscr{N}_A$，使 $x \overline{\in} V$，因而 $x \overline{\in} B$. 这表明 $B \subset A$，故 $A = B$.

118. 若所述 f 存在，则由 $\{x\} = \bigcap_1^\infty \{f > 1 - 1/n\}$ 得出 $\{x\}$ 是开集的可数交. 反之，设 $\{x\} = \bigcap_1^\infty V_n, V_n \subset X$ 是开集，不妨设 $V_1 = A^c$，且 $\{V_n\}$ 是一降列. $\forall n \in \mathbf{N}$，取 $f_n \in C(X)$，使得 $\{x\} < f_n < V_n$，则 $f \triangleq \sum_1^\infty 2^{-n} f_n \in C(X,J), f(x) = 1, f(A) = 0$. 若 $y \in X \backslash \{x\}$，则 $\exists n \in \mathbf{N}$，使 $y \overline{\in} V_n$，从而 $f_n(y) = 0, f(y) < 1$. 故 $\{x\} = f^{-1}(1)$.

119. 任给 $\mathbf{R}^X$ 的基开集 $V = \{f \in \mathbf{R}^X : f(x_i) \in \delta_i (1 \leqslant i \leqslant n)\}, x_i \in X$ 互不相同，$\delta_i \subset \mathbf{R}$ 是开区间. 取 $r_i \in \delta_i$；取 $f_i \in C(X)$，使 $f_i(x_i) = r_i, f_i(x_j) = 1 (j \neq i)$，则

$$f = \prod f_i \in V \cap C(X).$$

120. X 是 $X \times J$ 的闭子空间(用题 110).

121. 设 $f = (f_i), f_i \in C(A)$ 有扩张 $g_i \in C(X)$，于是 $g = (g_i) \in C(X, \mathbf{R}^n)$ 是 f 的扩张.

122. 若 A 为紧集，B 为闭集，则 $A \cap B$ 是 A 的相对闭子集，因而为紧集. 若 $A = \bigcap A_i$，每个 A_i 是紧闭集，则 A 是闭集，A 作为 A_i 中的闭集必为紧集. 考虑 $X = \mathbf{R} \times \{0,1\}$，$\{0,1\}$ 中用平凡拓扑，$A = ((0,1] \times \{0\}) \cup \{(0,1)\}, B = ([0,1) \times \{0\}) \cup \{(1,1)\}$，则 A, B 均为紧集，但 $A \cap B = (0,1) \times \{0\}$ 不是紧集.

123. 设 $\overline{A}_i$ 是紧集. 若 $A = \bigcup A_i$ 是有限并，则因 $\overline{A} = \bigcup \overline{A}_i$ 是紧集，故 A 是相对紧集. 若 $A = \bigcap A_i$ 是任意交，则由 $\overline{A} \subset \bigcap \overline{A}_i$ 及 $\bigcap \overline{A}_i$ 为紧集推出 $\overline{A}$ 为紧集.

124. 不妨设 $\mathscr{A}, U$ 在紧空间 X 中(否则用某个 $A \in \mathscr{A}$ 代 X). 因 $U^c \cap (\bigcap \mathscr{A}) = \varnothing$，故必有有限族 $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$，使 $U^c \cap (\bigcap \mathscr{B}) = \varnothing$ (用定理 3.2.2(iii))，于是 $\bigcap \mathscr{B} \subset U$.

125. 设 $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖，取 $A \in \mathscr{A}$，设 $A^c = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，取 $A_i \in \mathscr{A}$ 使 $x_i \in A_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，则 $\{A, A_1, \cdots, A_n\}$ 覆盖 X.

126. 取可数集 $\{x_n\} \subset X$，令 $A_n = \{x_k : k \geqslant n\}$，则 A_n 是有限相交闭集族，而 $\bigcap A_n = \varnothing$.

127. 若 $K^\circ \neq \varnothing$，则 K 包含一个基开集 $V = \bigcap_1^n P_{i_k}^{-1} V_k, V_k$ 是 X_{i_k} 中的非空开集. 若 $i \neq i_1, i_2, \cdots, i_n$，则 $X_i = P_i K$ 是紧的.

128. 用命题 3.2.5(i).

129. $1_X : (X, \tau) \to (X, \tau_1)$ 连续，且为闭映射(若 (X, τ_1) 是 T_2 空间).

130. $F : X \to FX$ 是连续闭映射.

131. 不妨设 $K = X$. 取开集 U_1 与 V_1 分离闭集 U^c 与 V^c，则 $A = U_1^c \subset U, B = V_1^c \subset V, K = A \cup B$.

132. $\forall (a,b) \in A \times B$，取 a 的开邻域 U_{ab} 与 b 的开邻 V_{ab}，使 $U_{ab} \times V_{ab} \subset W$. 固定 $b \in$

B，取有限个 $a_i \in A$，使 $A \subset \bigcup_i U_{a_i b} \triangleq U_b$，则 $V_b \triangleq \bigcap_i V_{a_i b}$ 是 b 的开邻域，$U_b \times V_b \subset W$. 取有限个 $b_j \in B$，使 $B \subset \bigcup_j V_{b_j} \triangleq V$，则 $U \triangleq \bigcap_j U_{b_j}$ 是 A 的开邻域，$U \times V \subset W$.

133. 取 $A = \{x_0\}$ 与 $B = Y$ 可从题132推出. 亦可仿照题132的证法直接证明(更为简单).

134. $\forall a \in A$，取开集 U_a 与 V_a 分离 a 与 B. 取有限个 $a_i \in A$，使 $A \subset \bigcup_i U_{a_i} \triangleq U$，则 U 与 $V \triangleq \bigcap_i V_{a_i}$ 是分离 A 与 B 的开集.

135. $\forall a \in A$，取 $f_a \in C(X)$，使 $f_a(a) = 0, f_a(B) = 1$. 取有限个 $a_i \in A$，使 $A \subset \bigcup_i \{f_{a_i} < 1/2\}$，令 $f = \min\limits_i f_{a_i}$，则 $f \in C(X), f(A) < 1/2, f(B) = 1$，$A$ 与 B 可函数分离(用引理3.1.10(ii)).

136. 用题132的证法.

137. 设 F 连续，$(x,y) \in \overline{G}$，则有网 $\{x_t\} \subset X$：$(x_t, Fx_t) \to (x,y) = (x, Fx) \in G$. 反之，设 F 不连续，则有网 $\{x_t\} \subset X, x_t \to x \in X$，但 $Fx_t \not\to Fx$，不妨设有 $V \in \mathscr{N}_{Fx}, Fx_t \overline{\in} V$. 取子网 $\{x_{t_\delta}\}$，使 $Fx_{t_\delta} \to y \in Y$，则 $x_{t_\delta} \to x, Fx_{t_\delta} \not\to Fx, (x,y) \in \overline{G} \backslash G$，$G$ 不是闭集.

138. $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \{\varphi > \alpha\} = \bigcup_{y \in Y} \{f(\cdot, y) > \alpha\}$ 是开集. 只要证 $\{\varphi \geqslant \alpha\}$ 是闭集(用推论2.2.4). 若 $x \in \overline{\{\varphi \geqslant \alpha\}}$，则有网 $\{x_t\} \subset \{\varphi \geqslant \alpha\}, x_t \to x$；取 $y_t \in Y$，使 $f(x_t, y_t) \geqslant \alpha$. 不妨设 $y_t \to y$，则 $f(x,y) \geqslant \alpha$，从而 $\varphi(x) \geqslant \alpha, x \in \{\varphi \geqslant \alpha\}$.

139. $f(X) \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup\limits_{k \geqslant n} f_k(X)}$ 是明显的. 若 $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup\limits_{k \geqslant n} f_k(X)}$，则 $\forall n \in \mathbf{N}, \exists k_n \geqslant n, x_n \in X$，使 $|f_{k_n}(x_n) - y| < 1/n$. 取 $\{x_n\}$ 的子网 $\{x_{n'}\}$，使 $x_{n'} \to x \in X$，则

$$|y - f(x)| \leqslant |y - f_{k_{n'}}(x_{n'})| + |f_{k_{n'}}(x_{n'}) - f(x_{n'})| + |f(x_{n'}) - f(x)| \to 0.$$

140. $\forall x \in X$，取 x 的开邻域 V_x 与 $f_x \in F$，使 $f_x | V_x = 0$；取有限个 $x_i \in X$，使 $X = \bigcup V_{x_i}$，则 $f = \prod f_{x_i} \in F, f \equiv 0$.

141. 设 Y 是 X 的闭子空间. 若 X 序列紧，$\{x_n\} \subset Y$，则 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}, x_{n_k} \to x \in Y$. 若 X 可数紧，$\mathscr{A}$ 是 Y 的可数开覆盖，则 $\{Y^c\} \cup \mathscr{A}$ 是 X 的可数开覆盖，它有有限子覆盖 $\{Y^c\} \cup \mathscr{B}$，于是 $Y \subset \mathscr{B}^u$. 若 X 序点紧，$A \subset Y$ 是无限集，则 $A' \neq \varnothing$，从而 A 在 Y 内有聚点(用题59). 其次设 $F \in C(X,Z)$. 若 $\{x_n\} \subset X$ 收敛，则 $\{Fx_n\}$ 收敛；若 $\mathscr{B} \subset \tau_Z, F^{-1}\mathscr{B}$ 覆盖 X，则 $\mathscr{B}$ 覆盖 FX.

142. 用对角线法选出积空间中的收敛子列.

143. 若 $f \in C(X)$，则 $f(X)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的紧集，其上下确界必属于 $f(X)$.

144. 取 X 中互异的可数个点 x_n，则 $\{x_n\}$ 必无收敛子列(用题21).

145. X 是紧空间(用定理3.2.4(ii)). $\forall n \in \mathbf{N}$，作 $x_n \in X$ 如下：$\forall s = (s_i) \in S$，令 $x_n(s) = s_n$. 任给 $\{n\}$ 的子列 $\{n_k\}$，总可取 $s \in S$，使 $\{s_{n_k}\}$ 不收敛，从而 $\{x_{n_k}\}$ 不收敛.

146. 设 $A = \{x_n\} \subset X, x_n$ 互不相同. 若 $A' = \varnothing$，则 $A_n \triangleq \{x_k : k \geqslant n\} (n \in \mathbf{N})$ 是非空闭集的降列，$\bigcap A_n = \varnothing$，因而 X 非可数紧. 反之，设 $\{A_n\}$ 是 X 中非空闭集的降列，不妨设 $A_n \neq A_{n+1}$，取 $x_n \in A_n \backslash A_{n+1}, A = \{x_n\}$，则 $A' \subset \bigcap A_n$.

147. 若 X 非可数紧，则有无限集 $A = \{x_n\} \subset X, A' = \varnothing$，令 $U_n = A^c \cup \{x_n\}$，则 $\mathscr{U} = \{U_n : n \in \mathbf{N}\}$ 是 X 的无限可数开覆盖，$\mathscr{U} \backslash \{U_n\}$ 不覆盖 X.

148. 设 $A\subset X\times Y$ 是闭集，$(x_n,y_n)\in A, y_n\to y$，可设 x_n 互不相同，则 $\{x_n\}$ 有聚点 x，这推出 $(x,y)\in A$.

149. 任给开集 V 与 $x\in V$，要证 V 含 x 的一个闭邻域. 取 x 的下降的可数邻域基 $\{V_n\}$，则有某个 $\overline{V}_n\subset V$，否则 $\{\overline{V}_n\}\cup\{V^c\}$ 是有限相交闭集族，因而 $V^c\cap(\bigcap\overline{V}_n)\neq\varnothing$，这与 $\{x\}=\bigcap\overline{V}_n$（参考题101）相矛盾.

150. 设 X 非可数紧，则有可数无限集 $A=\{x_n\}\subset X, A'=\varnothing$（用题147），故 A 为闭集. 定义 $f(x_n)=n(n\in\mathbf{N})$，则 $f\in C(A)$. 由正规性，可设 $f\in C(X)$，f 是无界的.

151. 只要证 F 是闭映射. 设 $A\subset X$ 为闭集，则 FA 可数紧（用题141，143），从而序列紧（用 3.2.10(ii)）. 若 $y\in\overline{FA}$，则有序列 $\{x_n\}\subset A$，使 $Fx_n\to y$；$\{Fx_n\}$ 有子列 $\{Fx_{n_k}\}: Fx_{n_k}\to Fx$，$x\in A$，故 $y=Fx\in FA$.

152. $\forall a\in A$，取 a 的开邻域 V_a，使 $A\cap\overline{V}_a$ 是紧集，则 $V=\bigcup_{a\in A}V_a$ 是 A 的开邻域. 若 $x\in\overline{A}\cap V$，则有网 $\{x_t\}\subset A: x_t\to x$. 设 $x\in V_a$，不妨设 $\{x_t\}\subset V_a$，由 $A\cap\overline{V}_a$ 紧得出 $x\in A$，可见 A 是 V 中的闭集，故有闭集 $F\subset X$ 使 $A=V\cap F$.

153. 取开集 $V\subset X$ 与闭集 $F\subset X$，使 $Y=V\cap F$，则 $X=\overline{V\cap F}=F$，故 $Y=V$ 是开集.

154. 将 Z 中的点粘成一点 z 得到 $\mathbf{R}$ 的商空间 X，则投影 $P:\mathbf{R}\to X$ 是连续闭映射. z 在 X 中无紧邻域：若 V 是 z 在 X 中的邻域，则 $U=(V\backslash z)\cup Z$ 是 Z 在 $\mathbf{R}$ 中的邻域，由此推出 V 必非紧集.

155. 设 K_n 依定义3.2.15，令 $U_n=K^\circ_n$，则 $X=\bigcup U_n, U_n\subset U_{n+1}, \overline{U}_n\subset K_n\Rightarrow U_n$ 相对紧.

156. $\forall x\in X, \{X\}\cup\{(1/n,1): 1/n<x\}$ 是 x 的邻域系，每个 $(1/n,1)$ 是紧集. 但 $(1/n,1)$ 都不是闭集.

157. 由定理 3.2.14(i)有紧集 $B\subset X$ 使 $A\subset B^\circ$. 当 ε 充分小时必有 $V_\varepsilon\subset B^\circ$（参考题246），$V_\varepsilon$ 作为 V 的闭子集必为紧集.

158. 设 X 有可数基 $\{B_n\}$，K_n 依定义3.2.15. 任给紧集 $K\subset X$，当 n 充分大时 $K\subset K_n$，因而 $\infty\in X_\infty\backslash K_n\subset X_\infty\backslash K$. 由此易验证 $\{B_n\}\cup\{X_\infty\backslash K_n\}$ 是 X_∞ 的可数拓扑基.

159. 用题157.

160. 设 $X=\bigcup K_n$，K_n 是紧集；取紧集 $L_n\subset X$，使 $K_n\subset L^\circ_n$. 任给紧集 $K\subset X$，K 必被有限个 L_n 覆盖，可见 $\{X_\infty\backslash L_n\}$ 是 ∞ 的一个邻域子基. 反之，若 $\{X_\infty\backslash K_n\}$ 是 ∞ 的可数邻域基，$K_n\subset X$ 是紧集，则 $\{\infty\}=\bigcap(X_\infty\backslash K_n)$，$X=\bigcup K_n$.

161. 若存在如3.3节式(1)的分解，则 A,B 就是互相隔离的非空集. 反之，若 $X=A\cup B$，A 与 B 是互相隔离的非空集，则 $\overline{A}\cap B=\varnothing\Rightarrow\overline{A}\subset B^c\subset A\Rightarrow A$ 是闭集；同理 B 是闭集，因而 X 不连通.

162. 只要指明：A,B 互相隔离 $\Leftrightarrow A$ 与 B 在 $Y=A\cup B$ 中互相隔离，为此注意

$$(Y\cap\overline{A})\cap B=\overline{A}\cap B.$$

163. 令 $Y=A\cup B$，则 A 与 B 在 Y 中互相隔离（依题162之证），于是 A,B 在 Y 中既开又闭（依题161之证）.

164. 考虑 A,B 为开集的情况：

$$\overline{A\backslash B}\cap(B\backslash A)\subset\overline{(A\backslash B)\cap B}\cap A^c=\varnothing;\quad\text{（用题 24）}$$

同理 $\overline{B\backslash A}\cap(A\backslash B)=\varnothing$.

165. $S=(S\cap A)\cup(S\cap B)$;A 与 B 互相隔离 $\Rightarrow S\cap A$ 与 $S\cap B$ 互相隔离 $\Rightarrow S\cap A=\varnothing$ 或 $S\cap B=\varnothing\Rightarrow S\subset B$ 或 $S\subset A$.

166. 对 $B=A^c$ 应用题165.

167. 开集 U,V 满足题设条件正相当于 U,V 满足3.3节式(2).

168. 由 A 连通与 $A=(A\cap B)\cup(A\backslash B)$ 推出 $A\cap B$ 与 $A\backslash B$ 不隔离,故

$$\varnothing\neq[\overline{A\cap B}\cap(A\backslash B)]\cup(A\cap B\cap\overline{A\backslash B})\subset A\cap\partial B.$$

169. 设 $A=C\cup D$,C,D 是非空不交闭集,$A\cap B\cap D\neq\varnothing$,则 $A\cap B\subset D$(用题166),于是 $X=C\cup(D\cup B)$,C 与 $D\cup B$ 是不交闭集,X 不能连通.

170. 取定 $x_0\in X$. 若 $X\backslash\{x_0\}$ 连通,则令 $A=\{x_0\},B=X\backslash\{x_0\}$. 若 $X\backslash\{x_0\}$ 不连通,则有互不相交的非空开集 U,V,使得 $X\backslash\{x_0\}=U\cup V$. 令 $A=U\cup\{x_0\},B=V\cup\{x_0\}$,则 $X=A\cup B,A\neq B$,A 与 B 是闭集,$A\cap B=\{x_0\}$,故 A,B 均连通(用题169).

171. $\forall f\in C(A),J_i=f(A_i)$ 是区间,$f(A)$ 是两两不隔离的区间 J_i 之并,必定是一个区间.

172. 归结于证明:若 $J_0,J_1,\cdots,J_n$ 是区间,J_i 与 J_{i+1} 不隔离,则 $\bigcup J_i$ 是一区间. 这可对 n 用归纳法证明.

173. 设 $f\in C(X),\alpha,\beta\in f(X),\alpha<\beta$. 取 $x,y\in X$,使 $f(x)=\alpha,f(y)=\beta$;取连通集 $A\subset X$,使 $x,y\in A$,则 $[\alpha,\beta]\subset f(A)\subset f(X)$,这表明 $f(X)$ 是一个区间.

174. 注意 $(X\times Y)\backslash(A\times B)=\left(\bigcup\limits_{y\in Y\backslash B}X\times\{y\}\right)\cup\left(\bigcup\limits_{x\in X\backslash A}\{x\}\times Y\right)$,用题172.

175. 设 A 依题66,只要证 A 连通. $\forall x,y\in A$,有 $\{i_1,\cdots,i_n\}\subset I$,使当 $i\notin\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$ 时 $x_i=y_i=x_i^0$,于是 $\{x,y\}\subset\prod_1^n X_{i_k}\times\prod\limits_{i\neq i_1,\cdots,i_n}\{x_i^0\}\cong\prod_1^n X_{i_k}$,然后用题173.

176. 若 X 不连通,则有既开又闭的非空真子集 $A\subset X$. 取 $y_0,y_1\in Y,y_0\neq y_1$,定义 $f(A)=y_0,f(A^c)=y_1$,则 $f\in C(X,Y)$.

177. 若 $f\in C(X)$,则 $f(X)$ 是可数集,因而是单点集. 若 X 是度量空间,$a\in X,f(x)=d(x,a)$,则 $f(x)\equiv 0$.

178. 设 $A\subset X$ 是既开又闭之集,则或 $A=\varnothing,X$,或 A 与 A^c 均有限,后者为不可能.

179. 类似于题178.

180. 若 $x,y\in A^c,x\neq y$,取直线 $L\subset\mathbf{R}^n\backslash\{x,y\},\forall z\in L$,线段 $[x,z]$ 与 $[z,y]$ 构成一个连接 x,y 的连通集 A_z,这样的 A_z 有不可数多个,其中至少有一个 $A_z\subset A^c$.

181. 即证 $\mathbf{R}^n\backslash\mathbf{Q}^n$ 连通,见上题.

182. 该集可写成 $\left(\bigcup\limits_{y\in\mathbf{Q}}(\mathbf{R}\times\{y\})\right)\cup\left(\bigcup\limits_{x\in\mathbf{Q}}(\{x\}\times\mathbf{R})\right)$,用定理3.3.3(i).

183. 参照题180的解法.

184. $A\subset A\cup B\subset\overline{A}=A\cup(\{0\}\times\mathbf{R})$,$A$ 连通(用定理3.3.3(i)).

185. 可设 X 紧,因而正规,每个 $A\in\mathscr{A}$ 连通且 $\mathscr{A}=\mathscr{A}^*$. 令 $A_0=\bigcap\mathscr{A},f\in C(A_0)$,证 $f(A_0)$ 为区间,可设 $f\in C(X)$(用定理3.1.16). 设 $x,y\in A_0,f(x)=a<c<b=f(y)$. 因 $\forall A\in\mathscr{A},[a,b]\subset f(A)$,故 $A^*\triangleq A\cap f^{-1}(c)$ 是非空闭集,且 $\{A^*:A\in\mathscr{A}\}$ 有限相交,

故存在一点 $z\in\bigcap\{A^*:A\in\mathscr{A}\}$，必有 $z\in A_0, f(z)=c$.

186. 设 $C=A\cup B$, A,B 是不交的非空闭集，则有开集 U,V 分离 A,B. 由 $\bigcap\mathscr{A}\subset U\cup V$ 推出有 $E\in\mathscr{A}$，使 $E\subset U\cup V$，这推出 $E\cap U\in\mathscr{A}$（设 $x\in A$），从而 $C\subset U$!.

187. 设 $A=\mathbf{R}\times\{0\}$, $B=\mathbf{R}\times\{1\}$, $L_n=\{n\}\times J$, $X_n=A\cup B\cup\left(\bigcup_n^\infty L_k\right)$，则 $\bigcap X_n=A\cup B$ 不连通.

188. 若 A 是有限集，则必是离散的（题104），因而是单点集.

189. 若 $x_0,x_1\in A$，则必有 $f\in C(X)$, $f(x_0)=0$, $f(x_1)=1$. 因 $f(A)$ 是区间，故 $[0,1]\subset f(A)$, A 必不可数.

190. 若 $x_0,x_1\in A$，则有 $f\in C(X)$：$\{x_0\}\prec f\prec(A\backslash\{x_1\})$. 因 $f(A)$ 是区间，$f(x_0)=1$, $f(x_1)=0$，故 $[0,1]\subset f(A)$, A 必不可数.

191. 否则 X 是连通开集，从而是不可数集（用题190）.

192. 只要证：若 c 是 $f(\mathbf{R}^n)$ 的内点，则 $A=f^{-1}(c)$ 必为不可数集. 若 A 是可数集，则 A^c 连通（用题180），但 $f(A^c)=f(\mathbf{R}^n)\backslash\{c\}$ 是不连通的！

193. 用题192的证法.

194. 取 $x_0,x_1\in\in X$. 由正规性，有 $f\in C(X,J)$，使 $f(x_0)=0$, $f(x_1)=1$. 因 $f(X)$ 是区间，故必 $f(X)=J$.

195. 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是一拓扑嵌入. 取 $x_i\in\mathbf{R}^n$, $y_i=f(x_i)$ $(i=1,2,3)$，使 $y_1<y_2<y_3$. $\mathbf{R}^n\backslash\{x_2\}$ 是连通的（题180），但 $f(\mathbf{R}^n)\backslash\{y_2\}$ 不连通. 若 $\mathbf{R}^n$ 可嵌入 S^1，则 $\mathbf{R}^n$ 必可嵌入 $S^1\backslash\{1\}\cong\mathbf{R}$.

196. 若 $c<f(a)<d$，则 $f((a,b])=[c,d]\backslash\{f(a)\}$ 是不连通的！故必 $f(a)=c$ 或 d；同理 $f(b)=d$ 或 c.

197. A,B 均连通. 若 $a_1,a_2\in A$, $b_1,b_2\in B$，则 $(A\times B)\backslash\{(a_1,b_1)\}$ 是连通的.

198. 利用分解 $S^n=S^n_+\cup S^n_-\cup$ 赤道，S^n_+ 与 S^n_- 分别为 S^n 除去两极点所得之集.

199. $\forall\, x,y\in X$，定义 $\varphi([0,1))=x$, $\varphi(1)=y$，则 $\varphi\in C(J,X)$.

200. 有限补拓扑弱于通常拓扑.

201. 连通性依题184. $\forall\, x\in A, y\in B$, $A\cup B$ 中不存在连接 x 与 y 的路.

202. 设 X 局部连通，$V\in\mathscr{N}_x$, P 是 V 的含 x 的连通支. 取 x 的连通邻域 U，使 $U\subset V$，则必有 $U\subset P$，因而 $P\in\mathscr{N}_x$. 逆命题成立的理由是明显的.

203. 设 $\{P_i:i\in I\}$ 是 X 的路连通支，则 P_i 均为路连通开集. 若 X 本身非路连通，则 I 至少含两个元，因而 X 可分解为两个非空开集的不交并！

204. 用定理3.3.12(ii).

205. 用定理3.3.12(ii).

206. 任何离散空间是局部路连通的；0 在 $\overline{A}$ 中的任何相对邻域都不是连通的.

207. X 的路连通性依命题3.3.7(i)；点(0,1)在 X 中无连通邻域基.

208. A 必含于 X 的某个连通支 P. 因 $P=A\cup(P\backslash A)$, A 与 $P\backslash A$ 均为闭集，故必 $P\backslash A=\varnothing$, $P=A$.

209. 因 $(\partial A)^c=A\cup A^{co}$，故 A 在 $(\partial A)^c$ 中既开又闭，因而可用题208.

210. 只要证 $\mathbf{R}$ 中多于一点的集是不连通的. 设 $A\subset\mathbf{R}$ 至少含两点 x,y, $x<y$，则 $A\subset$

$(-\infty,y)\cup[y,\infty)$，$(-\infty,y)$ 与 $[y,\infty)$ 均为开集且均交于 A，故 A 不连通.

211. 设 $A\subset\mathbf{R}$ 是稠集，$B\subset A^c$ 至少含两点 $x,y,x<y$，则必有 $z\in A\cap(x,y)$，于是 $B\subset(-\infty,z)\cup(z,\infty)$，$B$ 是不连通的.

212. 设 $P_i:X\to X_i$ 是投影. $P_iP_x\subset P_{x_i}\Rightarrow P_x\subset\bigcap P_i^{-1}P_{x_i}=\prod P_{x_i}$；而 $\prod P_{x_i}$ 连通 $\Rightarrow\prod P_{x_i}\subset P_x$.

213. 用题212.

214. 设 $\{P_i:i\in I\}$ 是 X 的连通支之全体，A 是 X 中的可数稠集，则 $\forall\, i\in I$，有 $A\cap P_i\neq\varnothing$，I 必为可数集.

215. 若 $P_x=P_z,x,z\in X$，则 $z\in P_x,Fz\in FP_x$，从而 $Fz\in FP_x\subset P_{Fx}$，这推出 $P_{Fx}=P_{Fz}$. 若 $F:X\cong Y$，则 $P_{Fx}=P_{Fy}\Rightarrow P_x=P_y$.

216. 设 $x\in F^{-1}P_y,P_x$ 是 X 中含 x 的连通支，则 $Fx\in P_y\cap FP_x$，而 FP_x 连通，故 $FP_x\subset P_y$，因而 $P_x\subset F^{-1}P_y$.

217. 以 P_x 记 X 的含 x 的连通支，则 $C\subset P_x$（用题186）. 其次，$\forall\, A\in\mathscr{A}$，有 $\varnothing\neq C\subset A\cap P_x$，故 $P_x\subset A$（用题166），因而 $P_x\subset C$.

218. 用命题3.2.5(i)与定理3.3.12(iii).

219. 注意 X 的连通支构成 X 的一个开覆盖.

220. 注意 $X\backslash\{0,0\}$ 有4个连通支，而 $\mathbf{R}$ 除去一点之后只有两个连通支.

221. 由 $\alpha d\leqslant d_1\leqslant\beta d$ 推出：$d(x_n,y_n)\to0\Leftrightarrow d_1(x_n,y_n)\to0(n\to\infty)$.

222. 注意 d 与 d_1 拓扑等价 $\Leftrightarrow\forall\, x\in X$：$\{B_r(x):r>0\}\vdash\{B_r^1(x):r>0\}\vdash\{B_r(x):r>0\}$.

223. 用 φ 的性质(i)～(iii)直接验证 d 满足距离公理(D_1)～(D_3)；当 $k\to\infty$ 时 $d(x^k,y^k)\to0\Leftrightarrow d_i(x_i^k,y_i^k)\to0(1\leqslant i\leqslant n)\Leftrightarrow\sum_i d_i(x_i^k,y_i^k)\to0$.

224. 对 $\varphi(x)=\left(\sum|x_i|^p\right)^{1/p}$ 用题223.

225. 注意 $|d(x,y)-d(a,b)|\leqslant d(x,a)+d(y,b)$.

226. $\lim\limits_{m,n\to\infty}d(x_m,x_n)=0\Leftrightarrow\lim\limits_n\sup\limits_{k,l\geqslant n}d(x_k,x_l)=\lim\limits_n\operatorname{diam}\{x_k:k\geqslant n\}=0$.

227. 注意 $|d(x_m,y_m)-d(x_n,y_n)|\leqslant d(x_m,x_n)+d(y_m,y_n)$.

228. 验证 d 为度量是直接的. 若 $\{x_n\}\subset B(\Omega)$ 是Cauchy序列，则 $\forall\,\omega\in\Omega$：$\{x_n(\omega)\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的Cauchy序列，于是 $x_n(\omega)\to x(\omega)\in\mathbf{R}$；

$$d(x_n,x)\leqslant\varlimsup_m d(x_n,x_m)\to0\ (n\to\infty).$$

229. 仿题228之证：若 $\{y_n\}\subset Y$ 是Cauchy序列，则 $\forall\,\omega\in\Omega$，$\{y_n(\omega)\}$ 是 X 中的Cauchy序列，于是 $y_n(\omega)\to y(\omega)\in X$，

$$d(y_n,y)\leqslant\varlimsup_m d(y_n,y_m)\to0\ (n\to\infty).$$

230. 指出 X 是 $B(\Omega)$ 的闭子空间.

231. 对于距离公理只要考虑三角不等式，后者基于易验证的不等式 $d(x,y)\leqslant d(x,z)\vee d(z,y)$. 对于完备性，若 $\{x^k\}\subset X$ 是Cauchy序列，则 $\forall\, n\in\mathbf{N}$，当 k,l 充分大时有 $x_i^k=x_i^l(1\leqslant i\leqslant n)$.

232. 证充分性：设 $d(x_m(\omega),x_n(\omega))\rightrightarrows 0$，则 $\forall\ \omega\in\Omega$，$\{x_n(\omega)\}$ 是 X 中的Cauchy 序列，故 $x_n(\omega)\to x(\omega)$. 然后用

$$\sup_{\omega} d(x_n(\omega),x(\omega))\leqslant \overline{\lim_{m}}\sup_{\omega} d(x_n(\omega),x_m(\omega))$$

推出 $x_n(\omega)\rightrightarrows x(\omega)$.

233. 仿题 50 之证法，注意 $d(x(\omega),x(\omega_0))\leqslant d(x(\omega),x_n(\omega))+d(x_n(\omega),x_n(\omega_0))+d(x_n(\omega_0),x(\omega_0))$.

234. 只要证 $d(x_n,x)\to 0\Rightarrow d_1(x_n,x)\to 0(x_n,x\in V)$. 若 $\{x_n\}$ 是 (V,d_1) 中的Cauchy 序列，则有 $x\in V$ 使 $d(x_n,x)\to 0$.

235. 利用以下事实：$\operatorname{diam} B_\varepsilon(x)\leqslant 2\varepsilon$；$\operatorname{diam} A<\varepsilon,x\in A\Rightarrow A\subset B_\varepsilon(x)$.

236. 若 X 全有界，$\{x_n\}\subset X$ 是可数无限集，则 $\{x_n\}$ 有Cauchy 子列，因而 $\inf\limits_{m\neq n} d(x_m,x_n)=0$. 若 X 非全有界，$\{x_n\}$ 是引理4.1.8证明之后半部所给序列，则 $\inf\limits_{m\neq n} d(x_m,x_n)\geqslant\varepsilon$.

237. $\forall\ \varepsilon>0$，取 $n\in\mathbf{N}$，使 $\operatorname{diam}\{x_k:k\geqslant n\}<\varepsilon$ (用题226)，然后用题235.

238. 注意 X 完备 $\Leftrightarrow X$ 中的Cauchy 序列均有收敛子列；而Cauchy 序列必全有界(题237)，全有界序列必有 Cauchy 子列(引理4.1.8).

239. 设 X 完备，$A\subset X$ 是全有界无限集. 取无限可数集 $\{x_n\}\subset A$，则有子列 $x_{n_k}\to x\in X$，必 $x\in A'$. 反之，设 X 中的全有界无限集必有聚点，$\{x_n\}\subset X$ 是Cauchy 序列，可设 x_n 互不相同，x 是 $\{x_n\}$ 的聚点，则必有 $x_n\to x$.

240. 取 $\lambda>0$，使 $\{B_\lambda(x):x\in X\}<\mathscr{A}$. 设 $B\subset X$，$\operatorname{diam} B<\lambda$，取 $x\in B$，则 $B\subset B_\lambda(x)\subset A$ (对某个 $A\in\mathscr{A}$).

241. 否则，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，$\exists\ x_n,y_n\in X$，使 $d(x_n,y_n)\to 0$，而 $(x_n,y_n)\,\overline{\in}\,U$. 不妨设 $x_n,y_n\to x\in X$，则 $(x,x)\in\Delta\backslash U$！

242. 令 $f(x)=d(x,B)$，则 $f\in C(X)$，于是有 $a\in A$ 使 $f(a)=f_{\min}$，

$$d(A,B)\leqslant d(a,B)=\inf_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y)=d(A,B).$$

243. 可用题242；或直接证明如下：设 $d(A,B)=0$，则有 $a_n\in A,b_n\in B,d(a_n,b_n)\to 0$. 不妨设 $a_n\to a\in A$，于是 $a=\lim\limits_{n} b_n\in A\cap B$.

244. 取 $a_k\in A,b_k\in B$，使 $d(a_k,b_k)\to d(A,B)$. 因 A 是紧集，不妨设 $a_k\to a\in A$；$\{b_k\}$ 必有界，故不妨设 $b_k\to b\in B$，于是 $d(a,b)=d(A,B)$. A 与 B 均无界时结论不必成立，例如考虑 $A=\mathbf{N},B=\{n+1/n:n\geqslant 2\}$.

245. 用题244或直接证明.

246. 仿题241之证法，否则有 $x_n\in X,a_n\in A$，使得 $d(x_n,a_n)\to 0,x_n\,\overline{\in}\,U$. 不妨设 $a_n\to a\in A$，则 $x_n\to a\in A\backslash U$！

247. $1_X:(X,d)\to(X,d_1)$ 是一致连续的双射，用命题3.2.5(i)与例4.1.13.

248. 否则 $\forall\ l\in\mathbf{N}$，$\exists\ A_l\subset X$，$\operatorname{diam} A_l\to 0(l\to\infty)$，对某组 $F_{i_1},\cdots,F_{i_m}$(m 与 l 有关)，有 $A_l\cap F_{i_k}\neq\varnothing$，$\cap F_{i_k}=\varnothing$. 必有无限个 l 对应同一组 $F_{i_1},\cdots,F_{i_m}$，不妨设就是 $F_1,F_2,\cdots,F_m$. 取 $x_l\in A\cap F_1$，不妨设 $x_l\to x\in F_1$. 由 $A_l\cap F_j\neq\varnothing$ 与 $\operatorname{diam} A_l\to 0$ 推出 $x\in\bigcap_1^m F_j$，得出矛盾.

249. 用题149.

250. $f(x,y)=d(Fx,Fy)$ 在紧空间 $X\times X$ 上取得最大值.

251. 取 $x_0\in X$，令 $x_n=Fx_{n-1}(n\geqslant 1)$，则当 $m>n\geqslant 1$ 时有

$$d(x_n,x_m)\leqslant\sum_{i=n}^{m-1}d(x_i,x_{i+1})\leqslant\sum_{i=n}^{m-1}r^i d(x_0,x_1)\leqslant\frac{r^n d(x_0,x_1)}{1-r},$$

可见 $\{x_n\}$ 是Cauchy 序列. 设 $x_n\to x$，则 $Fx=x$. 若另有 $y=Fy$，则 $d(x,y)=d(Fx,Fy)\leqslant rd(x,y)$，这推出 $d(x,y)=0$，从而 $x=y$.

252. 令 $f(x)=d(x,Fx)$，则 $f\in C(X)$. 设 $x_0\in X, f(x_0)=f_{\min}$，则必有 $x_0=Fx_0$，否则 $f(Fx_0)<f(x_0)$! 若 $x_i=Fx_i, i=0,1$，则必 $x_0=x_1$，否则 $d(x_0,x_1)=d(Fx_0,Fx_1)<d(x_0,x_1)$!

253. A 是疏集 $\Leftrightarrow(\overline{A})^\circ=\varnothing\Leftrightarrow\overline{A^{co}}=X$. 若 A 是疏集，$V\subset X$ 是非空开集，则 $A^{co}\cap V\neq\varnothing$，$A^{co}\cap V$ 就是 V 的不交于 A 的非空开子集. 反之，若每个非空开集 V 有不交于 A 的非空开子集 U，则 $U\subset A^{co}, A^{co}\cap V\neq\varnothing$，这表明 $\overline{A^{co}}=X$.

254. 若 A 是闭疏集，则 $A^\circ=\varnothing, A=\partial A=\partial A^c$，$A^c$ 是开集. 反之，若 $A=\partial V$，V 是开集，则 A 是闭集，且

$$A^\circ=(\overline{V}\cap V^c)^\circ=(\overline{V})^\circ\cap V^{co}\subset\overline{V}\cap(\overline{V})^c=\varnothing.$$

255. (i)$\Rightarrow$(ii). 设 $A=\bigcup_1^\infty A_n$，A_n 是疏集，则 A_n^{co} 是稠开集，因而 $\varnothing=(\overline{\bigcap A_n^{co}})^c=(\bigcap A_n^{co})^{co}\supset A^\circ$. (ii)$\Rightarrow$(iii)是明显的. (iii)$\Rightarrow$(i). 设 $V_n\subset X$ 是开集，$V=\bigcap V_n$. 若 $\overline{V}\neq X$，则 V^{co} 是非空开集，从而是第二纲集，于是 $V^c=\bigcup V_n^c$ 不是第一纲集，至少对某个 n 有 $V_n^{co}\neq\varnothing$，即 $\overline{V}_n\neq X$.

256. $\mathbf{R}^2$ 是第二纲集，而 R^2 中的直线是疏集.

257. 注意第二可数的可数紧 T_2 空间是正则空间(用题148).

258. X 可度量化 $\Rightarrow$ 每个 X_i 可度量化，且除至多可数个例外，X_i 是平凡拓扑空间(用定理2.4.7).

259. 设 X 是可分度量空间，则 X 可拓扑嵌入某个紧度量空间 Y(参见推论4.1.20). 分别以 d,d_1 记 X 与 Y 中的度量，而以 $F:X\to Y$ 记拓扑嵌入，定义 $\rho(x,y)=d_1(Fx,Fy)(x,y\in X)$，则 ρ 是 X 上的拓扑等价于 d 的度量. 因 $F:(X,\rho)\to(FX,d_1)$ 是一等距同构，(FX,d_1) 是全有界的，故 (X,ρ) 亦必是全有界的.

260. 已知 $\mathscr{U}\subset\mathscr{N}_\Delta$(命题4.2.4(ii))，只要证 $\mathscr{U}\vdash\mathscr{N}_\Delta$. 任给 Δ 的开邻域 W. 因 $\mathscr{U}$ 有由闭集构成的基，故由4.2节式(6)有 $\Delta=\bigcap\{U:U=\overline{U}\in\mathscr{U}\}\subset W$. 然后用 $X\times X$ 的紧性及题125，得出有限子族 $\mathscr{B}\subset\mathscr{U}$，使得 $B\triangleq\bigcap\mathscr{B}\subset W, B\in\mathscr{U}$.

261. $g=g1_Y\simeq gfh\simeq 1_Xh=h$.

262. 设 $f_i:X_i\simeq Y_i$，g_i 是 f_i 的同伦逆，$i=1,2$，则 $f_1\times f_2:X_1\times X_2\simeq Y_1\times Y_2$，$g_1\times g_2$ 是其同伦逆.

263. 用题262，注意 $J\simeq\{0\}$.

264. 令 $\varphi=gfh$，验证 $\varphi f\simeq 1_X, f\varphi\simeq 1_Y$.

265. 若 $r:X\to A$ 是一个收缩，$F\in C(A,Y)$，则 $F\circ r\in C(X,Y)$，$Fr|A=F$. 反之，若 $1_A\in C(A,A)$ 有扩张 $r\in C(X,A)$，则 r 就是一个收缩.

266. 设 $r:X\to A$ 是一个收缩，则 $A=\{x:r(x)=x\}$ 是闭集(用题112).

267. 用定理 3.2.4(iii)与定理 3.3.3(iv).

268. 取 $H(t,x)=tx|x|^{-1}+(1-t)x$，则 $H\in C(J\times X,X)$，$X=\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$，$H(0,x)=x$，$H(1,x)\in S^{n-1}$，$|x|=1\Rightarrow H(t,x)=x$.

269. 取 $H(t,x)=(\cos\theta\sin(1-t)\varphi,\sin\theta\sin(1-t)\varphi,\cos(1-t)\varphi)$，$t\in J$，$x=(\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\varphi)\in S^2\setminus\{(0,0,-1)\}\triangleq X$，则 $H\in C(J\times X,X)$，$H(0,x)=x$，$H(1,x)=(0,0,1)$，$\varphi=0\Rightarrow H(t,x)=(0,0,1)$.

270. 若 $f:X\simeq\{x_0\}$，g 是 f 的同伦逆，则 $1_X\simeq gf\equiv\text{const}$. 反之，若 $1_X\simeq h$，$h(x)\equiv x_0\in X$，则 $h:X\simeq\{x_0\}$.

271. $1_X\simeq 0\Rightarrow f=f1_X\simeq 0$，$g=1_Xg\simeq 0$.

272. 设 $f,g\in C(Y,X)$，$h:X\simeq\{x_0\}$，$i:\{x_0\}\subset X$，则 $f=1_Xf\simeq ihf=ihg\simeq 1_Xg=g$. 反之，取 $h(x)\equiv x_0\in X$，则从 $h\simeq 1_X$ 推出 $h:X\simeq\{x_0\}$.

273. 设 $x_0,x_1\in X$，定义 $f_i(x)\equiv x_i(x\in X,i=0,1)$. 取 $H:f_0\simeq f_1$（用题272)，则 $\varphi(t)=H(t,x_0)\in C(J,X)$，$\varphi(i)=x_i(i=0,1)$.

274. 设 $H:1_X\simeq c$，$c(x)\equiv x_0\in X$（用题270)，则 H 是从 X 到 x_0 的形变收缩.

275. 设 H 是从 X 到点 $x_0\in A$ 的形变收缩，$r:X\to A$ 是一个收缩，则 $rH|(J\times A)$ 是从 A 到 x_0 的形变收缩.

276. 若 $H:f\simeq c$，$c(x)\equiv x_0\in X$，$f(tx)=H(1-t,x)((t,x)\in J\times S^n)$，则 $f\in C(B^{n+1},X)$，$f(0)=x_0$. 反之，设 $f\in C(B^{n+1},X)$，令 $H(t,x)=f(tx)$，则 $H\in C(J\times S^n,X)$，$H:c\simeq f|S^n$，$c(x)\equiv f(0)$.

277. 令 $F(t,x)=(1-t)f(x)+tg(x)$，$H(t,x)=F(t,x)/|F(t,x)|$. 若 $F(t,x)=0$，则 $(1-t)f(x)=-tg(x)$，两边取Euclid 范数得 $1-t=t$，即 $t=1/2$，因而 $f(x)=-g(x)$，与假设矛盾. 因此 $F(t,x)\neq 0$，$H\in C(J\times X,S^n)$. 显然 $H:f\simeq g$.

278. 可取如下的同伦：

$$H(t,s)=\begin{cases}x_0, & 0\leqslant 2s\leqslant 1-t,\\ \alpha(2s+t-1), & 1-t\leqslant 2s\leqslant 2-t,\\ x_1, & 2-t\leqslant 2s\leqslant 2.\end{cases}$$

279. 取 $H(t,s)=\alpha((1-t)(1-s)+t\varphi(s))$，则 $H:\bar{\alpha}\simeq\alpha\circ\varphi$，$H(t,0)=\alpha(1)$，$H(t,1)=\alpha(0)$.

280. 只要证 $\alpha*\delta\sim\gamma*\beta$. 令 $\rho(t)=H(t,t)$，只要证 $\alpha*\delta\sim\rho$（同理将有 $\gamma*\beta\sim\rho$). 所需的定端同伦如下：

$$G(t,s)=\begin{cases}H(st,s(2-t)), & 0\leqslant s\leqslant 1/2,\\ H(2s-1+t(1-s),st+1-t), & 1/2\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

281. 设 ρ,γ 是 X 中从 x_0 到 x_1 的路，则 $[\rho][\bar{\gamma}]\in\pi_1(X,x_0)$，$[\bar{\rho}][\gamma]\in\pi_1(X,x_1)$. $\rho_\#=\gamma_\#\Leftrightarrow\forall\ [\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$，有 $[\gamma][\bar{\rho}][\alpha][\rho][\bar{\gamma}]=[\alpha]\Leftrightarrow\pi_1(X,x_0)$ 是Abel 群.

282. 包含映射 $f:S^1\to\mathbf{R}^2$ 是单射，但 $f_*:\pi_1(S^1,1)\to\pi_1(\mathbf{R}^2,1)=0$ 不是单同态. 其次，$f:\mathbf{R}\to S^1$，$x\to e^{ix}$ 是满射，但 $f_*:0=\pi_1(\mathbf{R},0)\to\pi_1(S^1,1)$ 不是满同态.

283. 注意 $r_*i_*:\pi_1(A,x_0)\to\pi_1(A,x_0)$ 是单位映射.

284. 注意 $f\simeq-1_{S^n}$，用题 277 的证法.

285. $f \simeq 1_{S^n}$，同上题.

286. $r: S^1 \times S^1 \to S^1, (x,y) \to (x,1)$ 是一个收缩. 因 $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ 与 $\pi_1(T^2) \cong \mathbf{Z}^2$ 不同构，故 S^1 不是 T^2 的形变收缩核.

287. $f \in C(S^1, X)$ 可扩张为 $f \in C(B^2, X) \Leftrightarrow f \simeq 0$ (用题 276). $f \in C(S^1, X) \Leftrightarrow f = \alpha \circ \varphi, \alpha \in \Omega(X, x_0), \varphi: S^1 \to J/\{0,1\}$ 是一同胚.

288. 用题 277 或直接证明.

289. 用题 288 或直接证明.

290. 用题 288 或直接证明.

291. 用题 288 与 289.

292. 设 f 与 g 无不动点，则 $\deg f = \deg g = -1$ (用题 289)，于是 $\deg(gf) = 1 \neq (-1)^{2n+1}$，因而 gf 有不动点(用题 289).

293. 取 $g = f$ 用题 292.

294. 否则，$F(t,x) = (2-t)f(x) - tf(-x) \neq 0 ((t,x) \in J \times S^n)$，因而 $H = F/|F| \in C(J \times S^n, S^n), H(0,x) = f(x), H(1,x) \triangleq g(x)$ 为奇函数，推出 $\deg f = \deg g =$ 奇数！

295. 否则 $f \simeq 0$，$\deg f = 0 =$ 偶数. 于是由题 294 有 $x_0 \in S^n$，使得 $f(-x_0) = f(x_0)$.

296. 否则，$g \triangleq f/|f| \in C(S^n, S^n)$，$g$ 亦为奇函数，因而 $\deg g \neq 0$. 另一方面，$f(S^n)$ 含于某个 n 维子空间 $\Leftrightarrow g(S^n) \neq S^n \Rightarrow g \simeq 0$ (用例 5.1.3(iv)) $\Rightarrow \deg g = 0$！

297. 设 $f \in C(A,A)$，$r: X \to A$ 是一个收缩，则 $f \circ r$ 有不动点 $x_0 \in X$，x_0 必为 f 的不动点.

298. 令 $f(x) = (d(x,A_1), \cdots, d(x,A_{m-1}))$. 若 $m \leqslant n+1$，则 $f \in C(S^n, \mathbf{R}^n)$，于是有 $x_0 \in S^n$，使 $f(x_0) = f(-x_0)$ (用推论 5.3.5(iii)). 若对某个 $i < m$ 有 $x_0 \in A_i$，则 $-x_0 \overline{\in} A_i$，这得出 $d(x_0, A_i) = 0 < d(-x_0, A_i)$；若 $x_0 \in A_m$，则 $-x_0 \in A_i, i < m, d(-x_0, A_i) = 0 < d(x_0, A_i)$. 以上两种情况都与 $f(x_0) = f(-x_0)$ 相矛盾.

299. 令 $B_i = A_i \cap S^{n-1}$，则 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是覆盖 S^{n-1} 的闭集，由题 298 必有某个 $B_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 满足 $B_i \cap (-B_i) \neq \varnothing$.

300. 由题 298 有某个 A_i 满足 $A_i \cap (-A_i) \neq \varnothing$. 取定 $x_0 \in A_i \cap (-A_i)$，令 $f(x) = d(x, x_0)$，对 $f \in C(A_i)$ 应用介值定理.

名 词 索 引

名词按汉语拼音字母(外文名词按原文字母)顺序排列,名词后的数字指出该名词首次出现的页码;当标出几个页数时,表示该名词在几个不同的意义上使用.

参考书目

[1] 关肇直. 拓扑空间概论[M]. 北京:科学出版社,1958.

[2] Dugundji J. Topology. Boston:Allyn & Bacon,Inc. ,1966.

[3] Eisenberg M. Topology. New York: Holt, Rinehart & Winston, Inc. , 1974.

[4] Kelly J L. General Topology. Springer,1975. 中译本:一般拓扑学. 吴从炘,吴让泉译. 北京:科学出版社,1982.

[5] Engelking R. General Topology. Warszawa:Polish Sci. Publ. ,1977.

[6] 江泽涵. 拓扑学引论[M]. 上海:上海科学技术出版社,1978.

[7] Armstrong M A. Basic Topology. Berkshire:McGraw-Hill,1979. 中译本:基础拓扑学. 孙以丰译. 北京:北京大学出版社,1983.

[8] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京:高等教育出版社,1981.

[9] 李孝传,陈玉清. 一般拓扑学导引[M]. 北京:人民教育出版社,1982.

[10] 方嘉琳. 点集拓扑学[M]. 沈阳:辽宁人民出版社,1983.

[11] 儿玉之宏. 拓扑空间论[M]. 方嘉琳译. 北京:科学出版社,1984.

[12] 李元熹,张国樑. 拓扑学[M]. 上海:上海科学技术出版社,1986.

[13] 陈吉象. 代数拓扑基础讲义[M]. 北京:高等教育出版社,1987.

[14] 高国士. 拓扑空间论[M]. 北京:科学出版社,2000.

[15] 汪林等. 拓扑空间中的反例[M]. 北京:科学出版社,2000.

[16] 尤承业. 基础拓扑学讲义[M]. 北京:北京大学出版社,2003.

[17] 胡适耕,张显文. 抽象空间引论[M]. 北京:科学出版社,2005.

[General Information]
书名=基础拓扑学
作者=胡适耕编著
页数=225
SS号=11888641
DX号=
出版日期=2007年08月第1版
出版社=华中科技大学出版社